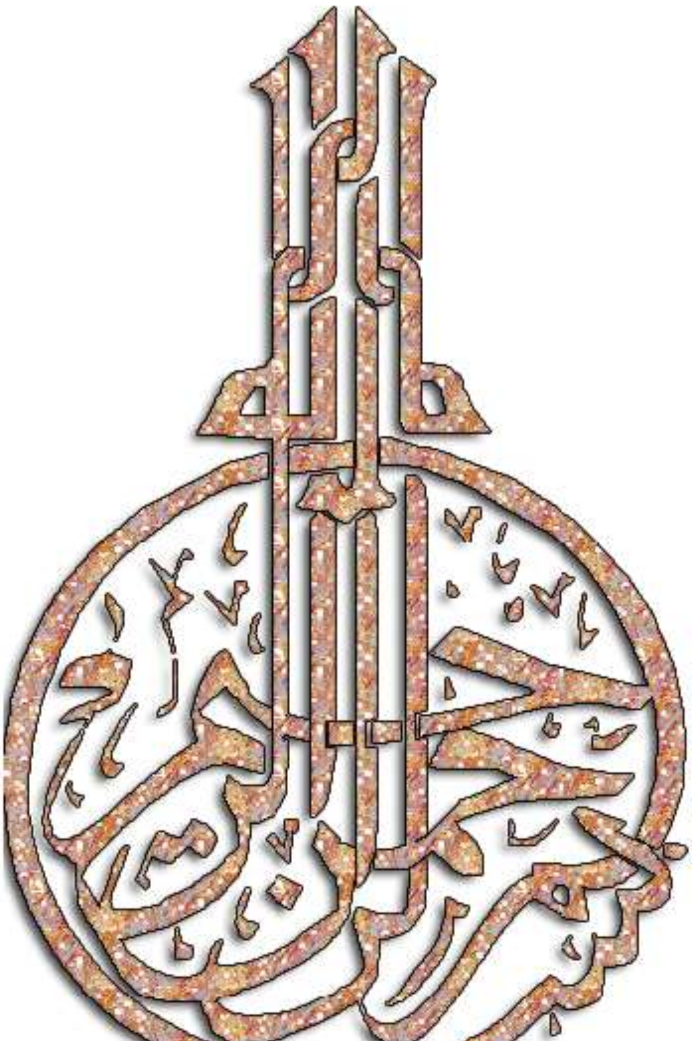
بسم الله الرحمن الرحيم

اللهم إني أسألك

الهدى والسداد

هندسة عديدات الطيات الجزئية من عديد الطيات من نوع - T

إعداد

عواطف بنت محمد بن مصلح الجدعاني

بكالوريوس علوم وتربية (قسم الرياضيات)

بحث مقدم لنيل درجة الماجستير في العلوم

(تخصص رياضيات بحتة/هندسة تفاضلية)

إشراف

د. ريم عبد الحميد الغفاري

استاذ مساعد الرياضيات البحتة (هندسة تفاضلية)

جامعة الملك عبد العزيز (كلية العلوم للبنات- قسم الرياضيات)

كلية العـــــلوم للبنات

جــامعة الملك عبد العزيز

جدة - المملكة العربية السعودية

1432-1431 هـ /2010-2011م

هندسة عديدات الطيات الجزئية من عديد الطيات من نوع - T

إعداد

عواطف بنت محمد بن مصلح الجدعاني

تمت الموافقة على قبول هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات درجة الماجستير في الرياضيات البحتة (هندسة التفاضلية)

لجنة المناقشة والحكم على الرسالة

	الاسم	المرتبة العلمية	التخصص	التوقيع
عضو خارجي	د. فالح رجاء الله السلمي	استاذ مشارك	هندسة تفاضلية	
عضو داخلي	د. سامي رفاعي حسن	استاذ مشارك	هندسة تفاضلية	
مشرف رئيسي	د. ريم عبد الحميد الغفاري	استاذ مساعد	هندسة تفاضلية	

جامعة الملك عبد العزيز

صفر 1432هـ - يناير 2011م

تم بحمد الله من هذه الرسالة نشر البحث :

CR-PRODUCT OF T-MANIFOLD

By

Awatif AL-Jedani and Reem AL-Ghefari

في مجلة :

Far East Journal of Mathematical Sciences

(FJMS)Volume38, Number 1,2010, pp 39-48

كما تمت المشاركة بنفس البحث في :

المؤتمر العلمي الأول لطلاب وطالبات التعليم العالي بالمملكة العربية السعودية - في الرياض في الفترة 15- 1431/3/18هـ

وبحمد الله كان البحث من البحوث الفائزة في المؤتمر وحصلنا على مركز متقدم .

كما تم بحمد الله قبول نشر البحث :

SOME RESULTS ON NORMAL CR- SUBMANIFOLD OF T - MANIFOLD

في مجلة :

JP JOURNAL OF GEOMETRY AND TOPOLOGY

شكر وتقدير

شكر وتقدير

الحمد لله الذي بحوله تتم النعم ... والصلاة والسلام على النبي المرسل لجميع الأمم .

الحمد لله حمداً كثيراً طيباً مباركاً أن أعانني ويسر لي إتمام هذه الرسالة ، وأسأله تعالى أن ينفع بها إنه على كل شيء قدير .

تعجز كلماتي عن وصف شكري وامتناني وعرفاني لوالدي العزيزين اللذين لم يتوانيا ولو للحظة عن الدعاء لي .. فأدعو الله أن يطيل في عمرهما ويبقيهما ذخراً لي ..كما أشكر إخوتي وأخواتي الذين وقفوا بجانبي .

وأتقدم بجزيل الشكر لأستاذتي الفاضلة الدكتورة ريم الغفاري لإشرافها على هذه الرسالة وتحملها الكثير من أجل إتمامها .

كما أشكر كل من ساندني ووقف إلى جانبي ولو بالدعاء من أعضاء هيئة التدريس بقسم الرياضيات وأخص منهم الدكتورة فتحية الهندي ورئيسة قسم الرياضيات الدكتورة نجاة مثنى والدكتورة فائزة البسام ووكيلة الدراسات العليا وعميدة الكلية .

كما وأشكر مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية .

وأتقدم بجزيل الشكر والعرفان لأستاذتي الفاضلة ريما حبيشي لوقوفها بجانبي ومساندتها لي .

الشكر الأول والأخير لله تعالى الذي فتح لي من كنوز علمه ...فلله الحمد والمنة .

المستخلص باللغة العربية

المستخلص

تعد نظرية عديدات الطيات الجزئية(Submanifolds Theory) من الموضوعات الهامة في علم الهندسة التفاضلية ، حيث ظهر لها العديد من التطبيقات الهامة في الفيزياء وبعض فروع العلم الأخرى . ومن هذا المنطلق تركزت هذه الأطروحة حول دراسة عديد طيات كوشي ريمان الجزئية من عديد الطيات من نوع - T التي تعتبر امتداد اً حديثاً لنظرية عديدات الطيات الريمانية ، ومجالاً خصباً للبحث والدراسة . فقد درسنا وحللنا بشكل شامل بعض النظريات والفرضيات لعديد طيات كوشي ريمان الجزئية من عديد الطيات من نوع -T. إضافة لذلك درسنا ضرب كوشي ريمان وعديد طيات كوشي ريمان الجزئية العمودية من عديد طيات من نوع – T والعلاقة بين هذين الموضوعين . أخيراً درسنا الشروط التكاملية للتوزيعات والتقوس المقطعي وممتد ريسي والتقوس القياسي وحصلنا على نتائج جديدة في كل هذه المواضيع .

المحتويات

قائمة المحتويات

مقدمة

مقدمة :

الهندسة التفاضلية هي لغة الفيزياء الحديثة ، تجمع بين أساليب الهندسة وحساب التفاضل والتكامل لتوفير وسيلة لدراسة الهندسة على الأسطح المنحنية ، فهي تستخدم التفاضل والتكامل وكذلك الجبر الخطي لدراسة المسائل في الهندسة .

تعد نظرية عديدات الطيات الجزئية(Submanifolds Theory) من الموضوعات الهامة في علم الهندسة التفاضلية ومجالاً خصباً للبحث والدراسة ، حيث ظهر لها العديد من التطبيقات المهمة في الفيزياء وبعض فروع العلم الأخرى .

يمثل عديد الطيات الجزئي (Submanifold) من عديد الطيات الهرميتي تقريباً (Submanifolds of almost Hermitian Manifold) دراسة هامة تتمثل في البناء المركب تقريباً J والذي ينقل كل متجه إلى متجه آخر عمودي عليه ، وكناتج طبيعي لهذه العملية يظهر لدينا عديدي طيات جزئيين والتي ظهرت بشكل واسع وهما:عديد الطيات الجزئي التحليلي (لا متغير) (Holomorphic(or invariant) Submanifold) وعديد الطيات الجزئي الحقيقي كلياً(تخالفي للامتغير)(The Totally Real(or anti- invariant) Submanifold).

عديد الطيات الجزئي التحليلي M يميز بالشرط $JT_xM \subseteq T_xM$ ، أما عديد الطيات الحقيقي كلياً فيميز بالشرط $JT_xM \subseteq T_xM^{\perp}$ لكل $x \in M$.

بدأت دراسة عديدات الطيات الجزئية التحليلية بواسطة Calabi *(Calabi 1953)* وآخرون في أوائل عام 1950 ، أما عديدات الطيات الجزئية الحقيقية كلياًفقد بدأت في مطلع العام 1970 *(Chen and Ogioue 1974, Chen et al. 1977)* .

قدم في Bejancu *(Bejancu 1978)*عام 1979 ، تعريف عديد الطيات الجزئي من النوع كوشي ريمان(Cauchy-Riemann) لعديد الطيات كهلر(Kaehler) والتي هي عبارة عن تعميم للنوعين السابقين من عديدات الطيات الجزئية .

عديد الطيات الجزئي الحقيقي كلياً M من عديد الطيات الهرميتي تقريباً يسمى عديد طيات جزئي من النوع كوشي ريمان إذا وجد توزيع تحليلي (Holomorphic Distribution) D على M أي$(JD_x = D_x)$ بحيث أن $JD^{\perp}{}_x \subseteq T_xM^{\perp}$ لكل $x \in M$ ، حيث أن $D^{\perp}$ ترمز إلى المكمل العمودي للتوزيع D .

وقد أسهم بنتائج رائعة في دراسة عديدات الطيات الجزئية من هذا النوع كلاً من Chen and Kobayashi *(Chen 1981, Kobayashi 1981)*

وآخرون ، حيث قدم Chen هندسة عديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان لعديد الطيات كهلر وقدم تعريف حاصل الضرب من النوع كوشي ريمان .

ومن ناحية أخرى ، هندسة عديدات الطيات الجزئية العامة لعديد الطيات كهلر المحافظ للزوايا محلياً (Locally Conformal) درست بواسطة *(Shahid and Sekigawa 1993)* .

وفي دراسة حديثة قدم Chen *(Chen 2001)* مفهوم الضرب الالتفافي من النوع كوشي ريمان (the CR-Warped Product). ،كما أثبت Chen *(Chen 2002)* العلاقة القاطعة بين دالة الالتفاف f (Warping Function) للالتفاف الضربي المغمور تقايسياً (Warped Product Isometrically Immersed) في الفضاء الحقيقي $\bar{M}(C)$ ومربع التقوس المتوسط $||H||^2$ (The Squared Mean Curvature).

في اتجاه آخر، تمكن Kobaysahi *(Kobayashi 1987)* من دراسة الانغمار الجزئي (Submersion) لعديد الطيات الجزئي من النوع كوشي ريمان ، وتعميماً لهذه النتائج درس Shahid and Alsolamy *(Shahid and Alsolamy 2000)* الانغمار الجزئي لعديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان الرباعي .

وجدير بالذكر أن عديد الطيات الجزئي من عديد الطيات الهرميتي تقريباً (Submanifolds of almost Hermitian Manifold) هو عديد طيات جزئي تحليلي أو حقيقي كلياً إذا وإذا فقط تحقق أن لكل متجه غير صفري u مماس لعديد الطيات M في أي نقطة x ، فإن قيمة الزاوية بين Ju وفضاء المماس T_xM هي صفر أو $\frac{\pi}{2}$ على الترتيب ، وبناءً على ذلك قدم Chen *(Chen 1990a, Chen 1990b)* تعميماً يعرف بعديدات الطيات الجزئية المائلة (Slant Submanifolds) والمعرفة عن طريق قيمة الزاوية وهنا تكون قيمة الزاوية بين Ju وفضاء المماس T_xM ثابتة . إن هندسة عديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان لعديد الطيات المتلامس تقريباً (Contact Metric Manifold) مثل:

Sasakian،Kenmotsu،Trans Sasakian and nearly Sasakian درست بواسطة Matsumoto *(Matsumoto 1993)*، *(Kobayashi 1981)* Kobayashi وآخرون (انظر المرجعين *(Chen 1973, Bejancu 1986)* لمزيد من التفاصيل) .

عرف Blair *(Blair 1970)* البنـاء $-f$ المتـري مـع الصـيغ المتممـة . إذا كـان البناء عموديا ً والصـيغة الأساسـية الثانيـة F مغلقـة فـإن البنـاء $-f$ يسمى بنـاء $-K$ (المنــاظر لبنــاء Kaehler) ، بالإضــافة إذا كانــت الصــيغ الأحاديــة $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ مغلقة فإن البناء $-K$ يسمى بناء $-$ c (المناظر لبناء Cosymplectic) وكذلك إذا كان البناء$-K$ يحقق الشرط $F = d\eta_1 = d\eta_2 = \cdots = d\eta_s$ فإنه يسمى بالبنـاء $-$ T (المنـاظر لبنـاء Sasakian) ، أخيـرا ً درس Calin *(Calin 2002)* عديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من عديدات الطيات من النـوع $-$ T ، وأيضـا ً درس Matsuyama *(Matsuyama and Sengupta 2004)* عديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان المعممة من عديد الطيات من النـوع T .

وامتدادا ً لهذه الدراسات نقدم في هذه الرسالة دراسة لهندسة عديدات الطيات الجزئيـة من عديد الطيات من النـوع $-$ T ، وفيمـا يلـي نستعرض بشكل موجز مـا تناولـه كل باب :

البـاب الأول : قـدمنا فيـه التعريفـات والعلاقـات الهامـة والخاصـة بعديـدات الطيـات التفاضلية والتي تعتبر الأساس الذي اعتمدنا عليه في الأبواب القادمة .

البـاب الثـاني : بحثنـا فـي هذا البـاب بعض النظريـات الهامـة لعديدات طيـات كوشـي ريمان الجزئية من عديد الطيات من النوع $-$ T .

البـاب الثـالث : درسـنا فـي هذا البـاب بعـض النظريـات والعلاقـات الخاصـة بعديـدات طيات كوشـي ريمـان الجزئيـة مـن عديـد الطيـات مـن النـوع $-$ T ، حيـث قمنـا بدراسـة التوريق للتوزيعات وضرب كوشي ريمان لعديدات طيات كوشي ريمـان الجزئيـة مـن عديد الطيات من النوع $-$ T ، كما قمنا بدراسة عديدات طيات كوشـي ريمـان الجزئيـة العموديـة مـن عديـد الطيـات مـن النـوع $-$ T والعلاقـة بـين الموضـوعين الأخيـرين وحصلنا على نتائج جديدة .

البـاب الرابـع : درسـنا فـي هذا البـاب بعـض النظريـات والعلاقـات الخاصـة بعديـدات طيات كوشي ريمـان الجزئيـة مـن عديـد الطيـات مـن النـوع $-$ T ، حيـث قمنـا بدراسـة التقوس المقطعي وممتد ريسي والتقوس القياسي وحصلنا على نتائج جديدة .

ختمنــا هــذه الرســالة بقائمــة المراجــع وقائمــة بــأهم المصــطلحات ومســتخلص باللغــة الانجليزية .

الباب الأول

أساسيات هامة

Basic Concepts

الباب الأول

أســاســيــات هــــامة

Basic Concepts

1-1 Introduction:

1-1 مقدمة:

نقدم في هذا الباب التعاريف والمفاهيم الأساسية وبعض النتائج الهامة التي سوف نعتمد عليها في الأبواب القادمة .

2-1 عديدات الطيات التفاضلية

1-2 Differential Manifolds

تعريف 1-2-1

الفضاء التوبولوجي (topological space) هو مجموعة غير خالية T مع تجميعة τ من المجموعات الجزئية من T بحيث تحقق الشروط التالية : *(Sutherland 1975)*

1) $T, \emptyset \in \tau$.
2) تقاطع أي مجموعتين في τ هو أيضاً مجموعة في τ .
3) اتحاد أي عدد من المجموعات في τ هو أيضاً مجموعة في τ .

التجميعة τ تسمى توبولوجي (topology) لـ T وعناصرها تسمى مجموعات مفتوحة (open sets) .

تعريف 1-2-2

الراسم $f: T_1 \rightarrow T_2$ حيث T_1 و T_2 فضاءين توبولوجيين يسمى **متصل** (continuous) إذا كان لكل مجموعة مفتوحة U في T_2 فإن $f^{-1}(U)$ تكون مجموعة مفتوحة في T_1 *(Sutherland 1975)*.

تعريف 1-2-3

الراسم $f: T_1 \rightarrow T_2$ حيث T_1 و T_2 فضاءين توبولوجيين يسمى **هوميومورفيزم** (homeomorphism) إذا كان f تقابل (bijection) بحيث أن f و f^{-1} رواسم متصلة (Sutherland 1975) .

إذا كانت $f: T_1 \rightarrow T_2$ راسم هوميومورفيزم إذن يمكننا القول أن الفضاءين التوبولوجيين T_1 و T_2 هما هوميومورفيك (homeomorphic) *(Kreyszig 1975)*.

تعريف 1-2-4

الفضاء التوبولوجي T يسمى **فضاء هاوسدورف** (Hausdorff space) إذا كان لكل نقطتين $x, y \in T$ و $x \neq y$ توجد مجموعتين مفتوحتين U و V في T بحيث أن: *(Sutherland 1975)*

$$x \in U\,, y \in V \quad and \;\; U \cap V = \emptyset.$$

تعريف 1-2-5

لتكن P أي نقطة من الفضاء التوبولوجي T . إذن المجموعة المفتوحة N التي تحتوي النقطة P تسمى **جوار**(neighbourhood) للنقطة P *(Kreyszig 1975)*.

تعريف 1-2-6

الفضاء التوبولوجي هاوسدورف المتصل $\overline{M}$ يسمى عديد **طيات توبولوجي** (topological manifold) ذو بعد n إذا كان لأي نقطة من $\overline{M}$ جوار هو هوميومورفيك إلى مجموعة مفتوحة في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ ذو البعد n .(*Kreyszig 1975*)

تعريف 1-2-7

لتكن $\overline{M}$ عديد طيات توبولوجي ، **البناء التفاضلي** (differentiable structure) على $\overline{M}$ من البعد n هو مجموعة الخرائط المفتوحة (open charts) $(U_i, \phi_i)_{i\in\Lambda}$ ، حيث Λ هو أس (index) المجموعة على $\overline{M}$ ، $\phi_i(U_i)$ هي مجموعة جزئية مفتوحة من $\mathbb{R}^n$ بحيث أن الشروط التالية متحققة: (*Sinha 1982*)

1) $\overline{M} = \cup_{i\in\Lambda} U_i$ ،

2) لأي زوج $i, j \in \Lambda$ ، الراسم $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ هو راسم تفاضلي differentiable (mapping) من $\phi_i(U_i \cap U_j)$ إلى $\phi_j(U_i \cap U_j)$.

3) المجموعة $(U_i, \phi_i)_{i\in\Lambda}$ هي العائلة العظمى (maximal family) للخرائط المفتوحة التي تحقق الشرطين (1) و (2) .

تعريف 1-2-8

إذا كانت U مجموعة مفتوحة من عديد الطيات التوبولوجي $\overline{M}$ تحتوي $x \in \overline{M}$ هي هوميومورفيك لمجموعة مفتوحة E من $\mathbb{R}^n$ بواسطة الهوميومورفيزم $\phi: U \to E$ بحيث أن : $\phi(x) = (x^1, \dots, x^n)$ ، فإن الزوج (U, ϕ) يسمى **خريطة احداثية** (coordinate chart) ، U يسمى **جوار احداثي** (coordinate neighbourhood) .

ϕ تسمى **راسم احداثي** (coordinate map) ، و $x^i(x^1, \dots, x^n)$ تسمى **الاحداثيات المحلية** (local coordinate) لـ $\overline{M}$ عند x *(Sinha 1982)* .

تعريف 1-2-9

عديــد الطيــات التفاضــلي ذو البعــد n (differentiable manifold of dimension n) هو فضاء هاوسدورف $\overline{M}$ مع التجميعة $\{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in I\}$ بحيث تحقق الشروط التالية: *(O'Neill 1983)*

1) أي مجموعة U_α هي مجموعة مفتوحة والراسم $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ هو هوميومورفيزم من U_α إلى المجموعة المفتوحة $\phi_\alpha(U_\alpha)$ في $\mathbb{R}^n$.

2) $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \overline{M}$ أي أن $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ غطاء مفتوح (*open cover*) للفضاء $\overline{M}$.

3) إذا كان $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ فإن الرواسم

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$

تكون رواسم تفاضلية.

كل زوج (U_α, ϕ_α) يسمى خريطة (chart) على $\overline{M}$ والتجميعة $\{(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in I\}$ تسمى بنية تفاضلية (differentiable structure) على $\overline{M}$ أو أطلس (atlas) .

تعريف 1-2-10

عديد الطيات التوبولوجي $\overline{M}$ من البعد n مع البناء التفاضلي من البعد n يسمى **عديد طيات تفاضلي** (أو عديد طيات - C^∞ أو ببساطة عديد طيات) *(Sinha 1982)*.

تعريف 1-2-11

عديد الطيات ذو البعد 1 يسمى منحنى وعديد الطيات ذو البعد 2 يسمى سطح .
الكرة -2 $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ هي مثال على السطح .
الكرة $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$: هي عديد طيات من البعد n لأي نقطة $n \in \mathbb{N}$.(*Patty 1993*)

تعريف 1-2-12

المتجه المماسي (tangent vector) X لعديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ عند النقطة $p \in \overline{M}$ هو دالة حقيقية القيمة $X: C^\infty(\overline{M}) \to \mathbb{R}$ والتي تحقق الشرطين التاليين:(*O'Neill 1983*)

$$1) \quad X(af_1 + bf_2) = aX(f_1) + bX(f_2),$$

$$2) \quad X(f_1 f_2) = (Xf_1)f_2(p) + f_1(p)(Xf_2),$$

لكل $a, b \in \mathbb{R}$ و $f_1, f_2 \in C^\infty(\overline{M})$ ، حيث $C^\infty(\overline{M})$ مجموعة كل الدوال التفاضلية حقيقية القيمة على $\overline{M}$.

مجموعة كل المتجهات المماسية عند النقطة $p \in \overline{M}$ يرمز لها بالرمز $T_p\overline{M}$ وتسمى بالفضاء المماسي (tangent space) لـ $\overline{M}$ عند النقطة p .

تعريف 1-2-13

المجال الاتجاهي (vector field) X على عديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ هو دالة تعين لكل نقطة $p \in \overline{M}$ متجه X_p في الفضاء المماسي $T_p\overline{M}$.

إذا كانت X مجال اتجاهي على $\overline{M}$ و $f \in C^\infty(\overline{M})$ فإن Xf تمثل دالة حقيقية القيمة على $\overline{M}$ تعطى بالعلاقة : (*O'Neill 1983*)

$$(Xf)p = X_p(f), \qquad \forall p \in \overline{M}.$$

المجال الاتجاهي X يكون **تفاضلي** (differentiable) إذا كانت الدالة Xf تفاضلية لكل $f \in C^\infty(\overline{M})$.

مجموعة كل المجالات الاتجاهية التفاضلية على $\overline{M}$ يرمز لها بالرمز $\mathfrak{X}(\overline{M})$.

تعريف 1-2-14

لتكن $T_x^*\overline{M}$ هي **الفضاء الثنوي** (dual space) للفضاء المماسي $T_x\overline{M}$ على $\overline{M}$ عند x .عناصر $T_x^*\overline{M}$ تسمى **متجه مصاحب** (covector) عند x .
تعيين متجه مصاحب عند أي نقطة x يسمى **بنية (شكل) تفاضلي** (differentiable form) من الدرجة الأولى (1- form) (*Yano and Kon 1984*).

تعريف 1-2-15

لتكن $\overline{M}$ عديد طيات تفاضلية الدالة حقيقية القيمة f على $\overline{M}$ تسمى **دالة تفاضلية (أو ملساء)** (smooth)عند النقطة $p \in \overline{M}$ إذا كان لأي خريطة (U, ϕ) تحتوي p يكون الراسم $(f \circ \phi^{-1}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تفاضلي (*Sinha 1982*).

تعريف 1-2-16

قوس لي (Lie bracket) للمجالين الاتجاهيين التفاضليين X و Y على عديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ هو أيضاً مجال اتجاهي تفاضلي يرمز له بالرمز $[X, Y]$ ويعرف بالعلاقة التالية :(*O'Neill 1983*)

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf),$$

كما يحقق الخواص التالية :

1) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$

$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z],$

2) $[X, Y] = -[Y, X],$

3) $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0,$

4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X,$

لكل $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ ، $f \in C^{\infty}(\overline{M})$ و $a, b \in \mathbb{R}$. وتعرف الخاصية الثالثة بمتطابقة جاكوبي (Jacobi identity) .

تعريف 17-2-1

الصيغة الأحادية (1-form) ω على عديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ هي دالة تعين لكل نقطة $p \in \overline{M}$ العنصر $\omega_p \in T_p^*\overline{M}$ حيث : *(O'Neill 1983)*

$$T_p^*\overline{M} = \{\omega_p : \omega_p \text{ دالة خطية حقيقية القيمة على } T_p\overline{M}\}$$ ،

ويسمى بالفضاء المماسي المصاحب (cotangent space) لـ $\overline{M}$ عند النقطة p .

إذا كانت ω صيغة أحادية على $\overline{M}$ و $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ فإن ωX تمثل دالة حقيقية القيمة على $\overline{M}$ تعطى بالعلاقة :

$$(\omega X)(p) = \omega_p(X_p), \qquad \forall p \in \overline{M} \ .$$

الصيغة الأحادية ω تكون تفاضلية (differentiable) إذا كانت الدالة ωX تفاضلية لكل $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

مجموعة كل الصيغ الأحادية التفاضلية على $\overline{M}$ ويرمز لها بالرمز $\mathfrak{X}^*(\overline{M})$.

تعريف 1-2-18

المجال الممتد (tensor field) T من النوع (r,s) على عديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ هو دالة متعددة الخطية على $C^{\infty}(\overline{M})$ ($C^{\infty}(\overline{M})$ –multilinear function) (*O'Neill 1983*):

$$T: \underbrace{\mathfrak{x}^*(\overline{M}) \times \ldots \times \mathfrak{x}^*(\overline{M})}_{r-times} \times \underbrace{\mathfrak{x}(\overline{M}) \times \ldots \times \mathfrak{x}(\overline{M})}_{s-times} \to C^{\infty}(\overline{M}).$$

وعلى وجه الخصوص فإن المجالات الممتدة من الأنواع (0,0) ، (1,0) و (0,1) على $\overline{M}$ تمثل دوال تفاضلية ، مجالات اتجاهية وصيغ أحادية على الترتيب .

مجموعة كل المجالات الممتدة من النوع (r,s) على $\overline{M}$ يرمز لها بالرمز $T_s^r(\overline{M})$.

تعريف 1-2-19

المجال الممتد T من النوع (0,2) على عديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ يسمى (*O'Neill 1983*):

1) **متماثل** (symmetric) إذا كان:

$$T(X,Y) = T(Y,X) \text{ لكل } X,Y \in \mathfrak{x}(\overline{M}) .$$

2) **متماثل تخالفياً** (skew-symmetric) إذا كان:

$$T(X,Y) = -T(Y,X) \text{ لكل } X,Y \in \mathfrak{x}(\overline{M}) .$$

وفي هذه الحالة فإن T يسمى صيغة ثنائية (2-form) على $\overline{M}$.

تعريف 1-2-20

المجال الممتد T من النوع (0,2) على عديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ يسمى (*O'Neill 1983*):

1) **موجب بالتحديد** (positive definite) إذا كان $X \neq o \Leftarrow T(X,X) > 0$.

2) **سالب بالتحديد** (negative definite)إذا كان $X \neq o \Leftarrow T(X,X) < 0$.

3) **غير مضمحل** (nondegenerate) إذا كان $T(X,Y) = 0$ لكل $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ $\Leftarrow X = 0$.

تعريف 1-2-21

الترابط (connection) $\overline{\nabla}$ على عديد الطيات التفاضلي $\overline{M}$ هو دالة

$$\overline{\nabla}: \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) \to \mathfrak{X}(\overline{M})$$

تحقق الخواص التالية : (*O'Neill 1983*)

1) $\overline{\nabla}_X(aY + bZ) = a\overline{\nabla}_X Y + b\overline{\nabla}_X Z,$

2) $\overline{\nabla}_{f_1 X + f_2 Y} Z = f_1 \overline{\nabla}_X Z + f_2 \overline{\nabla}_Y Z,$

3) $\overline{\nabla}_X(fY) = (Xf)Y + f\overline{\nabla}_X Y,$

لكل $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ و $f_1, f_2 \in C^\infty(\overline{M})$. $\overline{\nabla}_X Y$ تسمى **مشتقة متغايرة** (covariant derivative) لـ Y بالنسبة لـ X .

أما المشتقة المتغايرة للمجال الممتد T من النوع (0,s) أو (1,s) بالنسبة للمجال الاتجاهي X تعرف بالعلاقة التالية :(*Bejancu 1986*)

$$\left(\overline{\nabla}_X T\right)(X_1, \dots, X_s) = \overline{\nabla}_X(T(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^{s} \left\{T(X_1, \dots, \overline{\nabla}_X X_i, \dots, X_s)\right\},$$

لكل $X_i \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

وإذا كان $\overline{\nabla}_X T = 0$ لكل $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ فإن المجال الممتد T يسمى **متوازي** (parallel) بالنسبة للترابط $\overline{\nabla}$ (*O'Neill 1983*).

3-1 عديد الطيات الريمانية

1-3 Riemannian Manifolds

تعريف 1-3-1

المجال الممتد g من النوع $(0,2)$ يسمى **متري ريماني** (Riemannian metric)على عديد الطيات التفاضلية $\overline{M}$ إذا تحققت الشروط التالية :(*Bejancu 1986*)

1) g متماثل أي أن $g(X,Y) = g(Y,X)$ ، لكل $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

2) g موجب بالتحديد (positive definite) أي أن :

$g(X,X) \geq 0$ لكل $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ و $g(X,X) = 0$ إذا وإذا فقط كان $X = 0$.

عديد الطيات التفاضلية $\overline{M}$ مع المتري الريماني g تسمى **عديد طيات ريمان** (Riemannian manifold).

تعريف 2-3-1

يوجد في عديد طيات ريمان واحد وفقط واحد (ترابط متصل) يحقق الشروط التالية : (*Kadison and Singer 1993*)

1) ممتد الالتواء (torsion tensor) T يتلاشى ، أي أن :

$$T(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0 \ ,$$

2) g متوازي ، أي أن : $\left(\overline{\nabla}_X g\right) = 0$. الترابط $\overline{\nabla}$ يسمى **ترابط ريماني** (Riemannian connection)، وأحياناً يسمى ترابط Livi-Civita لكل المجالات الاتجاهية $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

تعريف 1-3-3

التقوس (**الانحناء**) (curvature) $\overline{R}$ لعديد طيات ريمان $\overline{M}$ هو راسم تطابق مصاحب لكل زوج $X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

$$R(X, Y): \mathfrak{X}(\overline{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\overline{M})$$

يعطى بالصورة : (*Kadison and Singer 1993*)

$$\overline{R}(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \ , \qquad Z \in \mathfrak{X}(\overline{M}).$$

تعريف 1-3-4

ممتد التقوس الريماني (Riemannian curvature tensor) من النوع (0,4) يعرف بواسطة :(*Bejancu 1986*)

$$\overline{R}(X, Y, Z, W) = g\left(\overline{R}(X, Y)Z, W\right), \qquad (1.3.1)$$

لكل $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

تعريف 1-3-5

لأي مستوى γ موسع (spanned) بواسطة المجالات العيارية المتعامدة (orthonormal) X, Y في الفضاء المماسي $T\overline{M}$ لأي $X \in \overline{M}$ ، **التقوس المقطعي** (sectional curvature) $K(\gamma)$ يعرف بالصورة :(*Bejancu 1986*)

$$K(\gamma) = K_{\overline{M}}(X \wedge Y) = \overline{R}(X, Y, Y, X). \qquad (1.3.2)$$

تعريف 1-3-6

إذا كـــانت$\{E_1 , E_2, \dots , E_n\}$ مجــالات اتجاهـــية مـــن الاطارالعيـــاري الـــمتـعامد (orthonormal frame) على $\overline{M}$ ، إذن **مـــجـــال ريـــســـي الممتـد** (Ricci tensor field) S من النوع $(0,2)$ يعطى بالصورة :(*Bejancu 1986*)

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}(E_i, X, Y, E_i) \,, \qquad (1\,.\,3\,.\,3)$$

و**التقوس القياسي** (scalar curvature) ρ على $\overline{M}$ يعرف بالصورة : (*Kenmotsu 1972*)

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} S\left(E_j, E_j\right) . \qquad (1\,.\,3\,.\,4)$$

1-4 عديد الطيات المتري المتلامس تقريباً

1-4 Almost contact metric manifold

تعريف 1-4-1

لتكن $\overline{M}$ عديد طيات تفاضلي ذات بعد حقيقي $(2n+s)$ ، f مجال اتجاهي من النوع $(1,1)$ ، ξ مجال اتجاهي ، η صيغة أحادية على $\overline{M}$ تحقق :(*Kenmotsu 1972*)

$$f^2 X = -X + \eta(X)\xi,$$

$$f \circ \xi = 0,$$

$$\eta(\xi) = 1,$$

$$\eta(fX) = 0,$$

لأي $X \in T\overline{M}$ ، فإن $\overline{M}$ تسمى **عديد طيات متلامس تقريباً** (almost contact manifold)
و (f, ξ, η) **بنية متلامسة تقريباً** (almost contact structure)على $\overline{M}$.

الآن بفرض أن $\overline{M}$ معرفة على مجال ممتد متري ريماني g الذي يحقق المعادلات (*Yano 1963*):

$$1)\ g(fX, fY) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\,, \qquad (1\,.\,4\,.\,1)$$

$$2)\ \eta(X) = g(X, \xi)\,, \qquad (1\,.\,4\,.\,2)$$

لكل $X\,,\ Y \in T\overline{M}$ ، فإن $\overline{M}$ تسمى **عديد طيات متري متلامس تقريباً** (almost contact metric manifold) والبنية (f, ξ, η, g) **بنية مترية متلامسة تقريباً** (almost contact metric structure) .

تعريف 1-4-2

المقطع المستوى (plane section) γ في الفضاء المماسي $T_X\overline{M}$ يقال له **مقطع** $\boldsymbol{f}$ **–** (f -section) إذا كان موسع بواسطة X و fX حيث $X \in \{\xi\}^{\perp}X$ وبالتالي التقوس (الانحناء) المقطعي $K(\gamma)$ يسمى **تقوس (انحناء) مقطعي** $\boldsymbol{f}$ **–** (f -Sectional curvature) (*Bejancu 1986*).

5-1 عديد طيات كوشي ريمان الجزئية من عديد الطيات المتري المتلامس تقريباً

1-5 CR-Submanifold of almost contact metric manifold

تعريف 1-5-1

لتكن f دالة ملساء من عديد الطيات M إلى عديد الطيات N و h دالة حقيقية القيمة على عديد الطيات N ($f: M \to N$) إذن **الراسم التفاضلي** (**أو راسم الجاكوبيان**) (differentiable map (or Jacobian map)) للدالة f عند النقطة $x_0 \in M$ يرمز له بالرمز $df_{x_0} = (f_*)_{x_0}$ هو راسم خطي (linear mapping) $df_{x_0}: T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}(N)$ يعرف بالصورة: (*Sinha 1982*)

$$df_{x_0}X \circ h = x_0(h \circ f).$$

تعريف 2-5-1

الراسم f من M يسمى **احتواء** (immersion) إذا كانت $(f_*)_x$ تباين (injective) لكل نقطة $x \in M$ (*Sinha 1982*) .

تعريف 3-5-1

لتكن M ، $\overline{M}$ عديدي طيات تفاضليين أبعادهما n, m على التوالي . فإن عديد الطيات M يسمى **عديد طيات جزئي** من $\overline{M}$ إذا كانت M مجموعة جزئية (subset) من $\overline{M}$ وكان الراسم $f: M \longrightarrow \overline{M}$ احتواء ومتباين (*Sinha 1982*) .

تعريف 1-5-4

التوزيع ذو البعد m (m-dimensional distribution) على عديد الطيات $\overline{M}$ هو راسم D على $\overline{M}$ ، الذي يعين لكل نقطة $X \in \overline{M}$ فضاء خطي جزئي بعده m (m-dimensional linear subspace) من $T_X\overline{M}$.

المجال الاتجاهي X على $\overline{M}$ ينتمي إلى D إذا كان $X_x\overline{M} \in D_x$ لكل $X \in \overline{M}$.(*Bejancu 1986*)

تعريف 1-5-5

التوزيع D يسمى **منشأ** (involutive) إذا كان لكل مجالين اتجاهيين $X, Y \in D$ يكون $[X, Y] \in D$ *(Bejancu 1986)*.

وتكون عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان **مورقة** (foliate) إذا كان التوزيع D منشأ .

تعريف 1-5-6

التوزيع D يسمى **تفاضلي** (differentiable) إذا كان لأي نقطة $X \in \overline{M}$ يوجد m من المجالات الاتجاهية التفاضلية المستقلة خطياً $\{x_i\}_{1\leq i\leq m} \in D$ في جوار النقطة x (*Bejancu 1986*).

تعريف 1-5-7

عديد الطيات الجزئي M من $\overline{M}$ يسمى **عديد طيات تكاملي** (integral manifold)على D إذا كان لأي نقطة $X \in M$ فإن D_X ينطبق على $T_X\overline{M}$.(*Bejancu 1986*)

تعريف1-5-8

التوزيع D يسمى **تكاملي** (integrable) إذا كان لأي نقطة $X \in \overline{M}$ يوجد عديد طيات تكاملي على D تحتوي X .

يلاحظ أن أي توزيع منشأ هو تكاملي(*Bejancu 1986*) .

تعريف 1-5-9

عديد طيات ريمان الجزئية M ذات البعد m من عديد طيات $\overline{M}$ تسمى **عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان** (CR-submanifold) إذا كانت ع مماس لـ M وإذا وجد على M توزيع تفاضلي $D: x \longrightarrow D_x \subset T_x M$ بحيث أن (*Bejancu 1986*):

1) D_x لامتغير (invariant) تحت تأثير f أي أن : $f D_x \subset D_x$ لأي $x \in M$.

2) التوزيع المكمل العمودي (orthogonal complementary dis.) $D^{\perp}: x \longrightarrow D_x^{\perp} \subset T_x M$ للتوزيع D على M يكون حقيقي كلياً (totally real) أي أن $f D_x^{\perp} \subset T_x M^{\perp}$ حيث $T_x M$, $T_x M^{\perp}$ هما الفضاء المماسي والفضاء العمودي على M عند x على التوالي .

إذا كان بعد $D_x^{\perp} = 0$ فإن عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان تسمى **عديد طيات جزئية لامتغيرة** .

و إذا كان بعد $D_x = 0$ فإن عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان تسمى **عديد طيات جزئية متغيرة** (anti-invariant).

التوزيع D يسمى توزيع أفقي (horizontal distribution) ، أما التوزيع $D^{\perp}$ فيسمى توزيع رأسي (vertical distribution) .

أيضاً الزوج المرتب $(D, D^{\perp})$ مع عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان M يسمى **أفقي** – ξ (ξ -horizontal) إذا كان $\xi \in D_x$ لأي $x \in M$.

وكذلك الزوج المرتب $(D, D^{\perp})$ مع عديد الطيات من الجزئية من النوع كوشي ريمان M يسمى **رأسي** – ξ (ξ -vertical) إذا كان $\xi \in D_x^{\perp}$ لأي $x \in M$.

عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان تكون **فعلية** إذا لم تكن عديد طيات جزئية لامتغيرة ولم تكن عديد طيات جزئية متغيرة .
.(neither an invariant nor an anti-invariant submanifold)

تعريف 1-5-10

لتكن M عديد طيات من النوع كوشي ريمان الجزئية من $\overline{M}$ إذن التوزيع D يمكن تعريفه بواسطة الاسقاط P (projector) والتوزيع $D^{\perp}$ يمكن تعريفه بواسطة الاسقاط Q والذي يحقق الشروط التالية :

$$P^2 = P \quad , \quad Q^2 = Q \quad , \quad PQ = QP = 0 \quad , \quad g(P, Q) = 0 \, .$$

لأي مجال اتجاهي X مماسي لـ M ، نضع :(*Calin 2002*)

$$X = PX + QX \, . \qquad (1 . 5 . 1)$$

حيث QX, PX ينتميان للتوزيع $D^{\perp}, D$ على التوالي $(PX \in D, QX \in D^{\perp})$.

أيضاً :(*Calin 2002*)

$$fX = tX + wX \ , \forall X \in TM. \qquad (1 . 5 . 2)$$

حيث $tX \in D, wX \in TM^{\perp}$.
لأي مجال اتجاهي N عمودي على M ، نضع :

$$fN = BN + CN \qquad (1 . 5 . 3)$$

حيث BN يرمز للمكمل العمودي لـ fN ، CN يرمز للمكمل الرأسي لـ fN .

لتكن $\overline{\nabla}_X$ المشتقة المتغايرة (covariant differentiation) بالنسبة لترابط Livi – Civita على $\overline{M}$ ، ∇_X المشتقة المتغايرة بالنسبة لترابط Livi – Civita على M .

إذن **صيغتي جاوس وفاينجارتن** (Gauss and Weingarten formulas) لـ M على التوالي تعطى بواسطة :(*Bejancu 1986*)

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \qquad (1.5.4)$$

$$\overline{\nabla}_X N = -\mathrm{A}_N X + \nabla_X^{\perp} N \qquad (1.5.5)$$

$N \in TM^{\perp}, \forall X, Y \in TM$ حيث h هي الصيغة الأساسية الثانية (second fundamental form) من M إلى $\overline{M}$.

A صيغة ممتد فاينجارتن (fundamental tensor of Weingarten)من M إلى $\overline{M}$.

$\nabla^{\perp}$ ترمز إلى الترابط العمودي(normal connection) في الحزمة العمودية (normal bundle).

إضافة إلى ذلك h, A مرتبطان بالعلاقة :(*Bejancu 1986*)

$$g(h(X,Y),N) = g(A_N X, Y) . \qquad (1.5.6)$$

تعريف 1-5-11

لتكن M عديد طيات من النوع كوشي ريمان الجزئية من عديد الطيات $\overline{M}$ إذن **معادلة جاوس** (equation of Gauss) تعطى بالصورة :(*Bejancu 1986*)

$$g\big(\overline{R}(X,Y)Z,W\big) = g(R(X,Y)Z,W) + g\big(h(X,Z),h(Y,W)\big) - g\big(h(Y,Z),h(X,W)\big) \qquad (1.5.7)$$

حيث $\overline{R}$ ممتد الانحناء (curvature tensor) لـ $\overline{M}$ ، R ممتد الانحناء لـ M .

تعريف 1-5-12

عديد الطيات من النوع كوشي ريمان الجزئية M من $\overline{M}$ يقال أنها **جـيوديسك كلياً – D** (D-totally geodesic) إذا كان :(*Bejancu 1986*)

$$h(X,Y)=0 \qquad (1.5.8)$$

لكل $X,Y\in D$.

عديد الطيات من النوع كوشي ريمان الجزئية M من $\overline{M}$ يقال أنها **جيـوديسـك كـلياً –$D^{\perp}$** ($D^{\perp}$-totally geodesic) إذا كان :(*Bejancu 1986*)

$$h(X,Y)=0 \qquad (1.5.9)$$

لكل $X,Y\in D^{\perp}$.

تعريف 1-5-13

عديد الطيات من النوع كوشي ريمان الجزئية M من $\overline{M}$ يقال أنها **جـيوديسـك مختلط كلياً** (mixed totally geodesic) إذا كان :(*Bejancu 1986*)

$$h(X,Y)=0 \qquad (1.5.10)$$

لكل $X\in D$, $Y\in D^{\perp}$.

تعريف 1-5-14

التوزيع الأفقي D يكون **متوازي** (parallal) بالنسبة للترابط ∇ على M إذا كان $\nabla_X Y\in D$ لكل $X,Y\in D$ (*Kenmotsu 1972*).

التوزيع الرأسي $D^{\perp}$ يكون **متوازي** بالنسبة للترابط ∇ على M إذا كان $\nabla_Z W \in D^{\perp}$ لكل $Z, W \in D^{\perp}$ (*Kenmotsu 1972*).

تعريف 1-5-15

المجال الاتجاهي العمودي (normal vector field) $N \neq 0$ يسمى **مقطع عمودي موازي** – **D** (D-parallel normal section) إذا كان $\nabla_X^{\perp} N = 0$ لكل $X \in D$ (*Kenmotsu 1972*).

لتكن $\{E_0 = \xi, E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}\}$ تشكل مجال محلي عياري متعامد (local field of orthonormal frames) على M بحيث أنه في حالة M أفقي - ξ فإن :

$$\{E_0 = \xi, E_1, E_2, \ldots, E_p, E_{p+1} = \varphi E_1, \ldots, E_{2p} = \varphi E_p\}$$

تشكل مجال محلي (local frame field) على D و $\{F_1, \ldots, F_q\}$ تشكل مجال محلي على $D^{\perp}$ ، حيث $m = 2p + 1 + q$ (*Shahid et al. 1985*) .

M يقال أنها **أدنى** – **D** (D-minimal) إذا كان :

$$\sum_{i=0}^{2p+1} h(E_i, E_i) = 0 . \qquad (1.5.11)$$

M يقال أنها **أدنى** – $\boldsymbol{D^{\perp}}$ ($D^{\perp}$-minimal) إذا كان :

$$\sum_{j=0}^{m-2p-1} h(E_{2p+j}, E_{2p+j}) = 0 . \qquad (1.5.12)$$

أو يمكننا القول: (*Kenmotsu 1972*)

$$\sum_{k=1}^{q} h(F_k, F_k) = 0 \qquad (1.5.13)$$

تعريف 1-5-16

لتكن $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ تشكل مجال محلي عياري متعامد على عديد طيات كوشي ريمان الجزئية M من $\overline{M}$ ، إذن **المجــال الاتجاهي للتــقوس المتوسط** H (mean curvature vector field) يعرف بالصورة: (*Shahid et al. 1985*)

$$H = \frac{1}{m}\ trace\ h = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h(E_i, E_i)\ . \qquad (1.5.14)$$

المجال الاتجاهي للتقوس المتوسط H لـ ξ - الأفقي من عديد طيات كوشي ريمان الجزئية M من $\overline{M}$ تعرف بالصورة: (*Shahid et al. 1985*)

$$H = \frac{1}{m}\{\sum_{i=1}^{2p+1} h(E_i, E_i) + \sum_{k=1}^{q} h(F_k, F_k)\}.$$

إذا كان $H = 0$ فإن M يقال أنها **أدنى** (minimal).

الآن يجب أن نعرف :

$$H_D = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=1}^{2p+1} h(E_i, E_i)\ . \qquad (1.5.15)$$

و

$$H_{D^\perp} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} h(F_k, F_k). \qquad (1.5.16)$$

إذا كان $H_D = 0$ فإن عديد طيات كوشي ريمان الجزئية M يقال أنها **أدنى - $\boldsymbol{D}$** .
وإذا كانت $H_{D^\perp} = 0$ فإن M يقال أنها **أدنى - $\boldsymbol{D}^\perp$** .

6-1 عديد الطيات من النوع -T

1-6 T- Manifold

تعريف 1-6-1

لتكن $\overline{M}$ ذات البعد $(2n + s)$ عديد طيات تفاضلية من الفصل C^∞ مع البناء $f-$ (f- structure) من الدرجة (rank) $2n$.

تكون f إطار مكمل (complemented frame) من البناء $f-$ إذا وجد بناء من المجالات الاتجاهية $\xi_\alpha \;, \alpha = 1, \dots, s$ ، وصيغة أحادية ثنوية (dual 1-form) η_α بحيث أن :(*Calin 2002*)

$$a)\ \eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (1.6.1)$$

$$b)\ \eta_\alpha \circ f = 0, \qquad (1.6.2)$$

$$c)\ f(\xi_\alpha) = 0, \qquad (1.6.3)$$

$$d)\ f^2 = -I + \sum_\alpha \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha, \qquad \alpha, \beta = 1, \dots, s. \qquad (1.6.4)$$

حيث I هو ممتد الوحدة على الحزمة المماسية $T\overline{M}$.

عديد الطيات $\overline{M}$ تكون **بناء f– المتري** (metric f- structure) إذا وجد متري ريماني g بحيث أن :(*Calin 2002*)

$$g(fX,Y) = -g(X,fY), \qquad (1.6.5)$$

حيث X, Y مجالات اتجاهية مماسية على $\overline{M}$.

وإذا كانت $\overline{M}$ بناء -fالمتري مع الاطارات المكملة (complemented frames) إذن يوجد متري ريماني على $\overline{M}$ بحيث أن :(*Kobayashi and Tsuchiya 1972*)

$$g(X,Y) = g(fX,fY) + \Phi(X,Y), \qquad (1.6.6)$$

حيث $\Phi(X,Y) = \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)$ and $X, Y \in T\overline{M}$.

تعريف 1-6-2

المجال الممتد Nijenhuis بالنسبة للممتد t ، يرمز له بالرمز N_t ، ويعطى بالصورة :(*Calin 2002*)

$$N_t(X,Y) = [tX,tY] + t^2[X,Y] - t[tX,Y] - t[X,tY], \qquad (1.6.7)$$

$$\forall X, Y \in T\overline{M}.$$

ونرمز للصيغة الثانية (fundamental 2-form) على $\overline{M}$ بالرمز F ، وتعطى بالصورة :(*Calin 2002*)

$$F(X,Y) = g(X,fY), \quad \forall X, Y \in T\overline{M}. \qquad (1.6.8)$$

تعريف 3-6-1

عديد الطيات $\overline{M}$ تسمى **عديد طيات من النوع – *K*** (K- manifold)إذا كانت الصيغة الثانية مغلقة والبناء – f المتري يكون عمودياً ، أي أن :(*Calin 2002*)

$$N_f(X,Y)+2\sum_{\alpha=1}^{s} d\eta_\alpha(X,Y)\xi_\alpha = 0 \quad ,\forall\, X,Y \in TM$$

عديد طيات من النوع– K تكون **عديد طيات من النوع – T** (T-manifold) إذا كان : $d\eta_\alpha = 0\,, \alpha = 1,\dots,s$ (Kobayashi and Tsuchiya 1972).

عندما $s = 1$ ،عديد طيات من النوع -K يكون عديد طيات متلامس تقريباً ، وفي هذه الحالة عديد طيات من النوع –Tتسمى **عديد طيات من النوع cosymplectic** (cosymplectic manifold).

وعندما $s = 0$ عديد طيات من النوع- T تسمى **عديد طيات من النوع كهلر** (keahler manifold) .

أيضاً في عديد طيات –T يتحقق التالي :(*Calin 2002*)

$$\left(\overline{\nabla}_X f\right)Y = 0\ , \qquad (1.6.9)$$

$$\overline{\nabla}_X \xi = 0\ ,\forall X,Y \in T\overline{M}\ . \qquad (1.6.10)$$

نفرض أن $\{\xi_1,\dots,\xi_s\}$(اتساع لـ) $\{\xi\} = span$. باستخدام العلاقة $(1.6.10)$ نجد أن التوزيع $\{\xi\}$ يكون متوازي بالنسبة لترابط Levi-Civita $\overline{\nabla}$ (*Calin 2002*).

ليكن $\overline{D}$ هو التوزيع المكمل العمودي (orthogonal complementary dis.) للتوزيع $\{\xi\}$ في $T\overline{M}$ ، وحيث أن التوزيع $\{\xi\}$ متوازي إذن باستخدام العلاقة $(1.6.10)$ وحقيقية أن $\overline{\nabla}$ ترابط متري (metric connection)؛ يكون التوزيع $\overline{D}$ توزيع متوازي أيضاً(*Calin 2002*).

الآن بفرض أن المجالات الاتجاهية ξ_α المماسية على M . إذن باستخدام العلاقات $(1\,.\,5.\,4)$ ، $(1\,.\,6.\,10)$ ، $(1\,.\,5.\,5)$ نحصل على :*(Calin   2002)*

$$\nabla_x \xi_\alpha = 0 \qquad (1\,.\,6.\,11)$$

$$h(x, \xi_\alpha) = 0 \qquad (1\,.\,6.\,12)$$

$$A_N \xi_\alpha = 0 \qquad (1\,.\,6.\,13)$$

$$\forall\, X \in TM\,, N \in TM^\perp\,, \alpha = 1, \dots, s.$$

تعريف1-6-4

ليكن بعد كلاً من التوزيعين $D, D^\perp$ هو $2p\,, q$ على التوالي ، إذن إذا كانت $p = 0$ نحصل **عديد طيات جزئي متغير** مماسي على $\xi_1, \dots, \xi_s$. وإذا كانت $q = 0$ فإننا نحصل على **عديد طيات جزئي لامتغير** .
لتكن P, Q مساقط المورفيزم لـ TM على $D, D^\perp$ على التوالي .
إذن لأي $X \in TM$ نحصل على :

$$X = PX + QX + \sum \eta_\alpha(X)\xi_\alpha.$$

تعريف1-6-5

إذا كانت M عديد طيات من النوع-T ، يعرف التقوس المقطعي – f بثابت c (constant f-sectional curvature c) يعطى بالصورة :

$$g(R(X,Y)Z,W)=\frac{c}{4}\{g(X,Z)g(W,Y)-g(X,W)g(Y,Z)$$

$$-g(X,Z)\Phi(W,Y)-g(W,Y)\Phi(Z,X)$$

$$+g(X,W)\Phi(Z,Y)+g(Y,Z)\Phi(X,W)$$

$$+\Phi(Z,X)\Phi(W,Y)-\Phi(X,W)\Phi(Z,Y)$$

$$+F(W,X)F(Y,Z)+F(Y,W)F(X,Z)$$

$$-2F(X,Y)F(W,Z)\} \qquad (1.6.14)$$

لأي من المجالات الاتجاهية $X,Y,Z,W\in\overline{M}$ (*Kobayashi and Tsuchiya* *1972*).

ملاحظة :

إذا كانت N عديد طيات من النوع-T ، فإن التقوس المقطعي - f بثابت c يسمى **فضاء الشكل من النوع-T** (T-space form) ونرمز لعديد الطيات بالرمز $N(c)$ (*Aktan et al.* *2008*).

الباب الثاني

عديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان
من النوع - T

CR- submanifolds of
a T- manifold

الباب الثاني

عديدات طيات كوشي ريمان الجزئية من نوع عديد الطيات من النوع - T

CR- submanifolds of a T- manifold

2-1 Introduction: مقدمة:1-2

درس Calin في بحثه (*Calin 2002*) عديد طيات كوشي ريمان الجزئية من نوع عديد الطيات من النوع -T ، ونقدم في هذا الباب بعضاً من النتائج التي حصل عليها وبعضاً من النظريات على التوزيعات التكاملية على M.

2-2 Some basic lemmas: 2 -2 بعض التمهيديات الأساسية:

فرضية 2-2-1

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن نحصل على :

$$i)\ A_{fZ}W = A_{fW}Z\ , \qquad (2.2.1)$$

$$ii)\ [X,\xi_\alpha] \in \mathrm{D}\ , \qquad (2.2.2)$$

$$iii)\ [Z,\xi_\alpha] \in D^\perp\ , \qquad (2.2.3)$$

$\forall X \in \mathrm{D}, Z, W \in D^\perp$.

البرهان :

لتكن $Z, W \in D^{\perp}$ و $U \in TM$. باستخدام
$(1.5.4)$ ، $(1.6.10)$ ، $(1.5.5)$، $(1.6.5)$

$$i)\ g\big(A_{fZ}W, U\big) = g(h(W,U), fZ)$$

$$= g(h(U,W), fZ)$$

$$= g(\overline{\nabla}_U W - \nabla_U W, fZ)$$

$$= g(\overline{\nabla}_U W, fZ)$$

$$= -g(\overline{\nabla}_U fW, Z)$$

$$= -g(-A_{fW}U - \nabla^{\perp}_U fW, Z)$$

$$= g(A_{fW}U, Z)$$

$$= g(A_{fW}Z, U)$$

(لأن A_N ممتد متماثل بالنسبة للممتد المتري g).

وهذا يؤدي إلى أن: $A_{fZ}W = A_{fW}Z$ لكل $Z, W \in D^{\perp}$.

باعتبار $(1.6.9)$ ، $(1.6.10)$ ، $(1.5.4)$، $(1.5.5)$ ، $(1.6.12)$
واعتبار حقيقة أن ∇ ترابط التوائي حر(torsion-free connection)، نستنتج أن :

$$[U, \xi_\alpha] = \nabla_U \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha} U$$

$$\therefore\ [U, \xi_\alpha] = -\nabla_{\xi_\alpha} U$$

وحيث أن :

$$g\left(\nabla_{\xi_\alpha} Z, fX\right) = -g\left(Z, \nabla_{\xi_\alpha} fX\right)$$

$$= -g(\nabla_{\xi_\alpha} fX, Z)$$

$$= g(\nabla_{\xi_\alpha} X, fZ)$$

$$= 0$$

$$\therefore\ g\left(\nabla_{\xi_\alpha} Z, fX\right) = 0 \quad , \quad g\left(\nabla_{\xi_\alpha} X, fZ\right) = 0$$

ومنها :

$$-g\left(\nabla_{\xi_\alpha} X, fZ\right) = g\left(-\nabla_{\xi_\alpha} X, fZ\right) = g([X, \xi_\alpha], fZ) = 0$$

وحيث أن $Z \in D^\perp$ بالتالي فإن $[X, \xi_\alpha] \in D$ حتى تكون العلاقة صحيحة .

بالمثل العلاقة :

$$-g\left(\nabla_{\xi_\alpha} Z, fX\right) = g([Z, \xi_\alpha], fX) = 0$$

وحيث أن $X \in D$ بالتالي فإن $[Z, \xi_\alpha] \in D^\perp$ حتى تكون العلاقة صحيحة .■

نتيجة 2-2-2

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن نحصل على :

$$\left(\nabla_{\xi_\alpha} t\right)X = 0 \quad , \forall\, X \in\, TM. \qquad (2.2.4)$$

البرهان :

إذا كانت $Z \in D^{\perp}$ فإن $tZ = 0$.
ومن الفرضية (2.2.1) نحصل على :

$$\nabla_{\xi_\alpha} tZ = t\nabla_{\xi_\alpha} Z + \left(\nabla_{\xi_\alpha} t\right)Z$$

$$\left(\nabla_{\xi_\alpha} t\right)Z = 0 \quad , \qquad \forall\, Z \in D^{\perp}$$

لتكن $X \in D$ ، باستخدام (1 . 6. 9) ، (1 . 6. 10) ، (1 . 5. 4)،(2 . 2. 2)
نحصل على:

$$\left(\overline{\nabla}_{\xi_\alpha} f\right)X = 0 \quad \Longrightarrow \overline{\nabla}_{\xi_\alpha} fX = f\overline{\nabla}_{\xi_\alpha} X \;\Longrightarrow\; \overline{\nabla}_{\xi_\alpha} tX = t\overline{\nabla}_{\xi_\alpha} X$$

$$\nabla_{\xi_\alpha} tX + h(\xi_\alpha, tX) = t\nabla_{\xi_\alpha} X + th(\xi_\alpha, X) \;\Longrightarrow\; \nabla_{\xi_\alpha} tX = t\nabla_{\xi_\alpha} X$$

$$\Longrightarrow \left(\nabla_{\xi_\alpha} t\right)X = 0\,,\;\; \forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{D}\,. \blacksquare$$

تمهيدية 2-2-3

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن العلاقات التالية صحيحة :

$$(\nabla_X t)Y = A_{wy}X + Bh(X,Y)\,, \qquad (2\,.\,2.\,5)$$

$$(\nabla_X w)Y = Ch(X,Y) - h(X,tY). \qquad (2\,.\,2.\,6)$$

$$a)\;\eta_\alpha(\nabla_X Z) = 0\,, \qquad (2\,.\,2.\,7)$$

$$b)\;\eta(A_N X) = 0\,, \qquad (2\,.\,2.\,8)$$

$$\forall\, X, Y \;\in \mathrm{TM} \;\;, N \in\; TM^{\perp} \;\;, Z \in\; D \oplus D^{\perp}.$$

البرهان :

لتكن $X, Y \in \mathrm{TM}$. باستخدام العلاقات
$(1.6.9)$، $(1.5.4)$، $(1.5.5)$ ، $(1.5.2)$ ، $(1.5.3)$ نحصل
بالحسابات المباشرة على :

من العلاقة$(1.6.9)$ ، $\Longleftarrow$ $(\overline{\nabla}_X f)Y = 0$

$$\therefore \overline{\nabla}_{\mathrm{X}} fY = f\overline{\nabla}_X Y \quad \xRightarrow{(1.5.4)، (1.5.2)}$$

$$\overline{\nabla}_{\mathrm{X}}(tY + wY) = f\big(\nabla_X Y + h(X,Y)\big)$$

$$\Longrightarrow \overline{\nabla}_{\mathrm{X}} tY + \overline{\nabla}_{\mathrm{X}} wY = f\nabla_X Y + fh(X,Y)$$

$$\Longrightarrow \nabla_X tY + h(X,tY) - A_{wY}X + \nabla_X^{\perp} wY$$

$$= t\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Bh(X,Y) + Ch(X,Y), \quad \forall X,Y \in \mathrm{TM}$$

$$\therefore t\nabla_X Y + (\nabla_X t)Y + h(X,tY) - A_{wY}X + w\nabla_X^{\perp} Y + (\nabla_X^{\perp} w)Y$$

$$= t\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Bh(X,Y) + Ch(X,Y)$$

بأخذ الجزء المماسي والجزء العمودي من العلاقة السابقة نحصل على العلاقتين المطلوبتين :

$$(\nabla_X t)Y = A_{wy}X + Bh(X,Y) ,$$

$$(\nabla_X w)Y = Ch(X,Y) - h(X,tY).$$

اثبات العلاقتين $(a), (b)$:

$$a)\ \eta_\alpha(\nabla_X Z) = g(\nabla_X Z, \xi_\alpha) = -g(Z, \nabla_X \xi_\alpha) = 0$$

$$\therefore\ \eta_\alpha(\nabla_X Z) = 0.$$

$$b)\eta(A_N X) = g(\mathrm{A}_N X, \xi_\alpha) = g(X, \mathrm{A}_N \xi_\alpha) = 0$$

$$\therefore\ \eta(A_N X) = 0\ .\ \blacksquare$$

تمهيدية 2-2-4

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن يكون لدينا :

$$(\nabla_X B)N = A_{CN} X - tA_N X\ ,$$

$$(\nabla_X C)N = -h(X, BN) - w(A_N X)\ ,$$

حيث :

$$(\nabla_X B)N = \nabla_X BN - B\nabla_X^{\perp} N\ ,$$

$$(\nabla_X C)N = \nabla_X^{\perp} CN - C\nabla_X^{\perp} N\ .$$

البرهان :

من العلاقة $(1\,.\,6.\,9)$:

$$\big(\overline{\nabla}_X f\big)N = 0 \implies \overline{\nabla}_X fN = f\overline{\nabla}_X N$$

$$\implies \nabla_X fN + h(X, fN) = -fA_N X + f\nabla_X^{\perp} N$$

$$\Rightarrow \nabla_X BN + \nabla_X CN + h(X, BN) + h(X, CN)$$

$$= -tA_N X - wA_N X + B\nabla_X^{\perp} N + C\nabla_X^{\perp} N \ ,$$

$$\Rightarrow \nabla_X BN + \overline{\nabla}_X CN - h(X, CN) + h(X, BN) + h(X, CN)$$

$$= -tA_N X - wA_N X + \nabla_X BN - (\nabla_X B)N + \overline{\nabla}_X CN + A_{CN} X - (\nabla_X C)N \ ,$$

$$\therefore h(X, BN) = -tA_N X - wA_N X - (\nabla_X B)N + A_{CN} X - (\nabla_X C)N$$

بمساواة الجزء العمودي في الطرفين وكذلك الجزء المماسي نحصل على :

$$(\nabla_X B)N = A_{CN} X - tA_N X \ ,$$

$$(\nabla_X C)N = -h(X, BN) - w(A_N X). \ \blacksquare$$

3-2 التوزيعات التكاملية على M :

2-3 Integrability of distributions on M :

الغرض من هذه الجزئية هو دراسة التوزيعات التـــــكاملية على M . التوزيعان $\{\xi\}$ و $D \oplus D^{\perp}$ متوازيان (parallel)، بالتالي ندرس التكامل للتوزيعات الأخرى على M (*Calin 2002*).

نظرية 2-3-1

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع T- . إذن التوزيعان $D^{\perp}$ و $\{\xi\} \oplus D^{\perp}$ تكامليان .

البرهان :

لتكن $Z, W \in D^{\perp}$. باستخدام(2 . 2. 1) ،(2 . 2. 5) نستنتج أن :

$$A_{wZ}W = A_{wW}Z$$

$$\Longrightarrow \ (\nabla_W t)Z - Bh(W,Z) = (\nabla_Z t)W - Bh(Z,W)$$

$$0 = A_{wZ}W - A_{wW}Z = -(\nabla_W t)Z + (\nabla_Z t)W$$

$$= -\nabla_W tZ + t\nabla_W Z$$

$$+\nabla_Z tW - t\nabla_Z W$$

$$= t(\nabla_W Z - \nabla_Z W) \qquad (2\,.3.1)$$

$$\therefore 0 = A_{wZ}W - A_{wW}Z = t[W, Z]$$

$$\therefore t[W, Z] = 0 , \forall W, Z \in D^{\perp} \Longrightarrow [W, Z] \in D^{\perp} \oplus \{\xi\}$$

$\Longrightarrow$ تكاملي $D^{\perp} \oplus \{\xi\}$

من العلاقتين $(1 . 6. 11)$ ،$(2 . 3. 1)$ نستنتج أن التوزيع $D^{\perp}$ تكاملي كالآتي :

$$[Z, \xi_{\alpha}] = -\nabla_{\xi_{\alpha}}X \Longrightarrow t[Z, \xi_{\alpha}] = -t\nabla_{\xi_{\alpha}}X \Longrightarrow t[Z, \xi_{\alpha}] = 0$$

$$\Longrightarrow [Z, \xi_{\alpha}] \in D^{\perp}$$

$\Longrightarrow$ تكاملي $D^{\perp}$. ■

نظرية 2-3-2

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن التوزيعان D و $D \oplus \{\xi\}$ تكامليان إذا وفقط إذا كان :

$$h(tX, Y) = h(X, tY) , \quad \forall X, Y \in \mathrm{D}. \qquad (2 . 3. 2)$$

البرهان :

لتكن $X, Y \in \mathrm{D}$. باستخدام $(2 . 2. 6)$ نحصل على :

$$(\nabla_X w)Y = Ch(X, Y) - h(X, tY)$$

أيضاً :

$$(\nabla_Y w)X = Ch(X,Y) - h(tX,Y)$$

بالطرح نحصل على :

$$h(tX,Y) - h(X,tY) = (\nabla_X w)Y - (\nabla_Y w)X$$

$$= \nabla_X wY - w\nabla_X Y - \nabla_Y wX + w\nabla_Y X$$

$$= w(\nabla_Y X - \nabla_X Y)$$

$$= -w(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \qquad (2.3.3)$$

$$\therefore h(tX,Y) - h(X,tY) = -w[X,Y]$$

التوزيع $D \oplus \{\xi\}$ تكاملي $\Leftrightarrow [X,Y] \in D$

$$\Leftrightarrow -w[X,Y] = 0$$

$$\Leftrightarrow h(tX,Y) - h(X,tY) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(tX,Y) = h(X,tY)$$

التوزيع D تكاملي $\Leftrightarrow g([X,Y],\xi_\alpha) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \xi_\alpha)$

$$\Leftrightarrow g([X,Y],\xi_\alpha) = g(\nabla_X Y, \xi_\alpha) - g(\nabla_Y X, \xi_\alpha)$$

$$\Leftrightarrow g([X,Y],\xi_\alpha) = -g(Y, \nabla_X \xi_\alpha) - \eta_\alpha(\nabla_Y X) = 0$$

$$\Leftrightarrow [X,Y] = 0$$

$$\Leftrightarrow h(tX,Y) = h(X,tY) \qquad \blacksquare$$

نظرية 3-3-2

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع T- . إذن التوزيعان D و $D \oplus \{\xi\}$ يكونان تكامليين إذا وفقط إذا كان :

$$N_t(U,V) \in \mathrm{D}\ ,\forall U,V \in \mathrm{TM}.$$

البرهان :

أولاً من $(1\,.\,5.\,2)$ ،$(1\,.\,6.\,3)$نحصل على :

$$f\xi_\alpha = t\xi_\alpha + w\xi_\alpha \Longrightarrow t\xi_\alpha = 0$$

وباستخدام $(1\,.\,6.\,12)$ ،$(1\,.\,6.\,13)$ ، $(1\,.\,6.\,7)$ ، $(2.\,2.\,5)$ وحقيقية أن ∇ ترابط التوائي حر نحصل على :

$$N_t(U,\xi_\alpha) = [tU,t\xi_\alpha] + t^2[U,\xi_\alpha] - t[tU,\xi_\alpha] - t[U,t\xi_\alpha]$$

$$= t^2\big(\nabla_U\xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha}U\big) - t(\nabla_{tU}\xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha}tU)$$

$$= t^2\big(\nabla_U\xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha}U\big) - t(t\nabla_U\xi_\alpha$$

$$-\big(\nabla_{\xi_\alpha}t\big)U - t\nabla_{\xi_\alpha}U)$$

$$= -t^2\nabla_{\xi_\alpha}U + t(A_{wU}\xi_\alpha + Bh(\xi_\alpha,U) + t^2\nabla_{\xi_\alpha}U$$

$$= 0$$

$$\therefore N_t(U,\xi_\alpha) = 0\,, \quad U \in TM.$$

لأي $W, Z \in D^{\perp}$ نستنتج أن :

$$N_t(Z,W) = [tZ,tW] + t^2[Z,W] - t[tZ,W] - t[X,tW]$$

$$= t^2(\nabla_Z W - \nabla_W Z)$$

$$= -t(t(\nabla_W Z - \nabla_Z W))$$

$$\therefore N_t(Z,W) = 0$$

الآن لتكن $X, Y \in \mathrm{D}$ باستخدام$(1\,.\,6.\,7)$ ،$(2\,.\,2.\,5)$ نحصل على :

$$N_t(X,Y) = [tX,tY] + t^2[X,Y] - t[tX,Y] - t[X,tY]$$

$$= \nabla_{tX}tY - \nabla_{tY}tX + t^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$$

$$-t(t\nabla_X Y - \nabla_Y tX) - t(\nabla_X tY - t\nabla_Y X)$$

$$= (\nabla_{tX}t)Y + t\nabla_{tX}Y - (\nabla_{tY}t)X - t\nabla_{tY}X$$

$$+ t^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - t(t\nabla_X Y - (\nabla_Y t)X - t\nabla_Y X)$$

$$-t((\nabla_X t)Y + t\nabla_X Y - t\nabla_Y X)$$

$$= (\nabla_{tX}t)Y + t^2\nabla_X Y - (\nabla_{tY}t)X - t^2\nabla_Y X$$

$$-t^2\nabla_X Y + t(\nabla_Y t)X + t^2\nabla_Y X - t(\nabla_X t)Y$$

$$= (\nabla_{tX}t)Y - (\nabla_{tY}t)X + t((\nabla_Y t)X - (\nabla_X t)Y)$$

$$= A_{wY}tX + Bh(tX, Y) - A_{wX}tY - Bh(tY, X)$$
$$+ t\big(A_{wX}Y + Bh(Y, X) - A_{wY}X - Bh(X, Y)\big)$$
$$= tA_{wY}X - tA_{wX}Y - tA_{wY}X + tA_{wX}Y + B(h(tX, Y) - h(X, tY))$$

$$\therefore N_t(X, Y) = B\big(h(tX, Y) - h(X, tY)\big) \qquad (2\,.3.4)$$

إذا أخذنا $Z \in D^{\perp}, X \in \mathrm{D}$ فإنه باستخدام $(1\,.6.7)$ ،$(2\,.2.5)$ نحصل على :

$$N_t(X, Z) = [tX, tZ] + t^2[X, Z] - t[tX, Z] - t[X, tZ]$$
$$= t^2[X, Z] - t[tX, Z]$$

$$\therefore N_t(X, Z) = t^2(\nabla_X Z - \nabla_Z X) - t(\nabla_{tX}Z - \nabla_Z tX)$$

$$= t^2\nabla_X Z - t^2\nabla_Z X - t\nabla_{tX}Z + t(\nabla_Z t)X + t^2\nabla_Z X$$

$$= t^2\nabla_X Z - t\nabla_{tX}Z + t(\nabla_Z t)X$$

$$= t^2\nabla_X Z - \nabla_{tX}tZ + (\nabla_{tX}t)Z + t(\nabla_Z t)X$$

$$= t^2\nabla_X Z - t\nabla_X tZ + (\nabla_{tX}t)Z + t(\nabla_Z t)X$$

$$= t^2\nabla_X Z - t(\nabla_X t)Z - t^2\nabla_X Z + (\nabla_{tX} t)Z + t(\nabla_Z t)X$$

$$= t\big((\nabla_Z t)X - (\nabla_X t)Z\big) + (\nabla_{tX} t)Z$$

$$= t\big(A_{wX}Z + Bh(Z,X) - A_{wZ}X - Bh(X,Z)\big)$$

$$+A_{wZ}tX + Bh(tX,Z)$$

$$= tA_{wX}Z - tA_{wZ}X + A_{wZ}tX + +Bh(tX,Z)$$

$$= -tA_{wZ}X + A_{wZ}tX + +Bh(tX,Z) \qquad (2.3.5)$$

باستخدام المعادلات(1 . 6. 5) ،(1 . 6. 9) ، (1 . 6. 10) ، نظرية (2 .3. 1)
وحقيقية أن ∇ هو ترابط التوائي حر نحصل بالحسابات المباشرة على :

$$g(N_t(X,Z),W) = g(-tA_{wZ}X + A_{wZ}tX + Bh(tX,Z),W)$$

$$= g(A_{wZ}tX + Bh(tX,Z),W)$$

$$\therefore g(N_t(X,Z),W) = g(A_{wZ}tX,W) + g(Bh(tX,Z),W)$$

$$= g(h(W,tX),wZ) - g(h(Z,tX),BW)$$

$$= g\big(\overline{\nabla}_W tX - \nabla_W tX, wZ\big) - g(\overline{\nabla}_Z tX - \nabla_Z tX, BW)$$

$$= g\big(\overline{\nabla}_W tX, wZ) - g(\nabla_W tX, wZ\big)$$

$$-g(\overline{\nabla}_Z tX, BW) - g(\nabla_Z tX, BW)$$

$$= g\left(\overline{\nabla}_W fX, fZ\right) - g(\overline{\nabla}_Z fX, fW)$$

$$= g\left(\overline{\nabla}_W X, Z\right) - \eta\left(\overline{\nabla}_W X\right)\eta(Z) - g\left(\overline{\nabla}_Z X, W\right) + \eta\left(\overline{\nabla}_Z X\right)\eta(W)$$

$$= g\left(\overline{\nabla}_W X, Z\right) - g\left(\overline{\nabla}_Z X, W\right)$$

$$= g(\nabla_W X, Z) - g(\nabla_Z X, W)$$

$$= -g(X, \nabla_W Z) + g(X, \nabla_Z W)$$

$$= g(X, \nabla_Z W - \nabla_W Z)$$

$$= g(X, [Z, W])$$

$$= 0 \quad , \quad \forall\, X \in \mathrm{D}, Z, W \in D^{\perp}$$

$$\therefore\, g(N_t(X, Z), W) = 0 \qquad (2\,.3.6)$$

إذن حصلنا على التالي:

$$N_t(X, Y) = -Bw[X, Y] = 0 \Longrightarrow N_t(X, Y) \in \mathrm{D}$$

$$g(N_t(X,Z),W) = 0 \Longrightarrow N_t(X,Y) = 0$$

$$\Longrightarrow N_t(X,Y) \in D \oplus D^{\perp}$$

$$N_t(Z,W) = 0 \Longrightarrow N_t(Z,W) \in D^{\perp}$$

وهذا يؤدي إلى أن :

$$N_t(U,V) \in \mathrm{D}\ , \forall U,V \in \mathrm{TM}. \qquad \blacksquare$$

الباب الثالث

ضرب كوشي ريمان لعديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من النوع - T

CR-Product of CR- submanifolds of a T- manifold

الباب الثالث

ضرب كوشي ريمان لعديدات الطيات الجزئية من نوع كوشي ريمان من النوع - T

CR-Product of CR- submanifolds of a T- manifold

3-1 Introduction: مقدمة:3-1

بداية قدم Bejancu(*Bejancu 1978*) بحثاً عن عديد ات طيات كوشي ريمان الجزئية من عديدات طيات كهلر . مفهوم عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان درس على أبنية أخرى ، مثل بناء Sasakian .(*Bejancu and Papaghivc 1981*)

نقدم في هـذا الباب النتائج التي حصلنا عليها والتي قمنا فيها بـــدراسة بـعضاً من خصائص ضرب كوشي ريمان لعديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من النوع – T وكذلك دراسة عديدات الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان العمودية من النوع – T.

3-2 Some basic lemmas: 3- 2 بعض التمهيديات الأساسية:

تمهيدية 3-2-1

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذا كانت $X, Y \in TM$ فإن :

$$P\nabla_X fPY = PA_{fQY}X + fP\nabla_X Y \,, \qquad (3.2.1)$$

$$Q\nabla_X fPY = QA_{fQY}X + th(X,Y), \qquad (3.2.2)$$

$$h(X,fPY) + \nabla_X^{\perp} fQY = fQ\nabla_X Y + nh(X,Y). \qquad (3.2.3)$$

البرهان :

من تعريف عديد الطيات من نوع –T يكون لدينا :

$$\left(\overline{\nabla}_X f\right)Y = 0 \quad , \forall X, Y \in TM.$$

إذن :

$$\overline{\nabla}_X f\left(PY + QY + \sum \eta_\alpha(Y)\xi_\alpha\right) = f\overline{\nabla}_X Y$$

$$\therefore \overline{\nabla}_X fPY + \overline{\nabla}_X fQY = f\overline{\nabla}_X Y$$

$$\Longrightarrow \nabla_X fPY + h(X, fPY) - A_{fQY}X + \nabla_X^{\perp} fQY$$
$$= f\nabla_X Y + fh(X, Y)$$

$$\Longrightarrow P\nabla_X fPY + Q\nabla_X fPY + h(X, fPY) -$$
$$PA_{fQY}X - QA_{fQY}X + \nabla_X^{\perp} fQY$$
$$= fP\nabla_X Y + fQ\nabla_X Y + th(X, Y) + nh(X, Y)$$

الآن بمقارنة الحدود المنتمية لـ $D \oplus \mu$ نحصل على :

$$P\nabla_X fPY - PA_{fQY}X = fP\nabla_X Y \,.$$

أيضاً بمقارنة الأجزاء المماسية في $D^{\perp}$ و $TM^{\perp}$ ، نحصل على :

$$Q\nabla_X fPY - QA_{fQY}X = th(X, Y).$$

أخيراً بمقارنة الأجزاء العمودية ،نحصل على :

$$h(X, fPY) + \nabla_X^{\perp} fQY = fQ\nabla_X Y + nh(X, Y).$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

تمهيدية 3-2-2

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن:

$$g(\nabla_X Z, Y) = g\left(TA_{fZ}X, Y\right), X \in TM, Y \in D, Z \in D^{\perp}.$$

البرهان :

$$(\nabla_X T)Z = \nabla_X TZ - T\nabla_X Z$$

وحيث أن $Z \in D^{\perp}$ ، إذن $fZ \in TM^{\perp}$ وبالتالي $fZ = NZ \Longleftarrow TZ = 0$

$$\therefore (\nabla_X T)Z = -T\nabla_X Z$$

الآن بحساب المقدار $T\nabla_X Z$ ، فمن تعريف عديد الطيات من النوع - T،يكون لدينا :

$$\left(\overline{\nabla}_X f\right)Z = 0$$

$$\Longrightarrow \overline{\nabla}_X fZ = f\overline{\nabla}_X Z$$

وباستخدام صيغتي جاوس وفاينجارتن ، نحصل على :

$$-A_{fZ}X + \nabla_X^{\perp} fZ = f\nabla_X Z + fh(X,Z)$$

$$= T\nabla_X Z + N\nabla_X Z + th(X,Z) + nh(X,Z)$$

$$(\nabla_X T)Z = -T\nabla_X Z = A_{fZ}X + th(X,Z)$$

لأي $Y \in D$ ، نحصل على $fY \in TM$ وبالتالي :

$$fY = TY + NY \Longrightarrow fY = TY.$$

الآن بأخذ الضرب القياسي لـ$Y \in D,\ fY = TY$ ، إذن نحصل على :

$$g(-T\nabla_X Z, TY) = g\big(A_{fZ}X, TY\big) + g(th(X,Y), TY)$$

$$\Longrightarrow g(-T\nabla_X Z, TY) = g\big(A_{fZ}X, TY\big)$$

$$\Longrightarrow -g(T\nabla_X Z, TY) = -g\big(TA_{fZ}X, Y\big)$$

$$\Longrightarrow \quad g(\nabla_X Z, T^2Y) = -g\big(TA_{fZ}X, Y\big)$$

$$\Longrightarrow \quad g(\nabla_X Z, f^2Y) = -g\big(TA_{fZ}X, Y\big)$$

$$\Longrightarrow g(\nabla_X Z, -Y + \eta_\alpha(Y)\xi_\alpha) = -g\big(TA_{fZ}X, Y\big)$$

$$\Longrightarrow -g(\nabla_X Z, Y) = -g\big(TA_{fZ}X, Y\big)$$

$$\Longrightarrow g(\nabla_X Z, Y) = g\big(TA_{fZ}X, Y\big)$$
$$, X \in TM, Y \in D, Z \in D^{\perp}.$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

3-3 التوريق للتوزيع $D \oplus \mu$ والتوزيع $D^{\perp}$:

3-3 The Leaves of The Distributions $D \oplus \mu$ and $D^{\perp}$:

بالنسبة لتكامل التوزيعين $D, D^{\perp}$ أثبت I Mihai في بحثه (*Kobayashi et al. 1998*) ، أن التوزيعين $D^{\perp}, D^{\perp} \oplus \mu$ دائماً تكامليين .
من جهة أخرى ، إذا كانت $p > 0$ فإن التوزيعين $D, D \oplus D^{\perp}$ غير تكامليين .
كما أن ، التوزيع $D \oplus \mu$ يكون تكاملي إذا وفقط إذا كان :

$$h(X, fY) = h(fX, Y)\,, \qquad \forall X, Y \in D.$$

ومن هذه النتائج يمكننا دراسة التوريق للتوزيعين $D^{\perp}, D \oplus \mu$.

نظرية 3-3-1

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن

1) التوزيع $D \oplus \mu$ التكاملي المورق (leaves) هو جيوديسك كلياً (totally geodesic) محتوى في M إذا وفقط إذا كان :

$$g(h(D, D), fD^{\perp}) = 0$$

2) التوزيع $D \oplus \mu$ التكاملي المورق هو جيوديسك كلياً محتوى في $\overline{M}$ إذا وفقط إذا كان :

$$h(D, D) = 0.$$

البرهان :

1) بفرض أن التوزيع $D \oplus \mu$ التكاملي المورق هو جيوديسك كلياً محتوى في M.

ولتكن $X, Y \in D \oplus \mu$ ، إذن $Z \in D^{\perp}$, $g(\nabla_X fY, Z) = 0$

$$\therefore 0 = g(\nabla_X fY, Z) = -g(fY, \nabla_X Z)$$

$$= -g(\nabla_X Z, fY)$$

$$= -g(\nabla_X Z, TY)$$

$$= g(T\nabla_X Z, Y).$$

الآن من المعادلة : $T\nabla_X Z = -A_{fZ}X - th(X, Z) \quad , X \in D \oplus \mu \, , Z \in D^{\perp}$

وبأخذ الضرب القياسي (الداخلي) لـ $Y \in D \oplus \mu$ نحصل على :

$$g(T\nabla_X Z, Y) = -g(A_{fZ}X, Y) - g(th(X, Z), Y)$$

ولكن $g(T\nabla_X Z, Y) = 0$

$$\therefore g\left(A_{fZ}X, Y\right) + g(th(X, Z), Y) = 0$$

$$\Longrightarrow g(h(X, Z), fZ) - g(h(X, Z), TY) = 0$$

$$\Longrightarrow g(h(X, Z), fZ) = 0 \quad , \forall X, Y \in D \oplus \mu \, , Z \in D^{\perp}.$$

$$\therefore g(h(D, D), fD^{\perp}) = 0$$

العكس :

بفرض أن $g(h(D, D), fD^{\perp}) = 0$ متحققة ، إذن التوزيع $D \oplus \mu$ تكاملي .

كذلك ، إذا كانت $X, Y \in D \oplus \mu \, , Z \in D^{\perp}$ إذن :

$$g(h(X, fY), fZ) = 0$$

$$\therefore 0 = g(h(X, fY), fZ) = g\left(\overline{\nabla}_X fY, fZ\right) + g(\nabla_X fY, fZ)$$

$$= g\left(\overline{\nabla}_X fY, fZ\right)$$

$$= g\left((\overline{\nabla}_X f)Y, fZ\right) + g(f\overline{\nabla}_X Y, fZ)$$

$$= g(f\overline{\nabla}_X Y, fZ)$$

$$= g\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) - \eta\left(\overline{\nabla}_X Y\right)\eta(Z)$$
$$= g\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) = g(\nabla_X Y, Z)$$

$$\therefore 0 = g(\nabla_X Y, Z) \ \ , X, Y \in D \oplus\mu \ , Z \in D^{\perp}.$$

إذن $\nabla_X Y \in D \oplus\mu$ والتوزيع $D \oplus\mu$ مورق وبالتالي هو جيوديسك كلياً محتوى في M .

2) بفرض أن التوزيع $D \oplus\mu$ التكاملي المورق هو جيوديسك كلياً محتوى في $\overline{M}$ ،
أي أن $\overline{\nabla}_X Y \in D \oplus\mu \ \ , \forall\, X, Y \in D \oplus\mu$.

الآن لتكن $V \neq 0 \in TM^{\perp}$ إذن يكون لدينا :

$$g\left(\overline{\nabla}_X Y, V\right) = 0$$

$$\Longrightarrow g(\nabla_X Y, V) + g(h(X, Y), V) = 0$$

$$\Longrightarrow g(h(X, Y), V) = 0 \ \ , \forall\, X, Y \in D \oplus\mu$$

$$\Longrightarrow g(h(D, D), V) = 0$$

$$\Longrightarrow h(D, D) = 0$$

العكس:
بفرض أن $h(D,D)=0$ ، إذن نحصل على :

$$g(h(D,D),fD^{\perp})=0$$

وحيث أن التوزيع D لامتغير (invariant) تحت تأثير الدالة f ، إذن :

$$h(D,fD)=0 \qquad , \qquad h(fD,D)=0$$

$$h(X,fY)=0 \qquad , \qquad h(fX,Y)=0$$

$$\therefore h(X,fY)=h(fX,Y)$$

وبالتالي التوزيع $D\oplus\mu$ تكاملي .

الآن لتكن M_1 توريق للتوزيع $D\oplus\mu$ ، وبالرمز للصيغة الأساسية الثانية (second fundamental form) لـ M_1 المحتواه (immersion) في $\overline{M}$ بالرمز h_1 (وبالرمز للصيغة الأساسية الثانية لـ M_1 المحتواه في M بالرمز h_2) ، إذن من المعادلة $h(D,D)=0$ نحصل على $h_1=h_2$.

لكن من العلاقة $g(h(D,D),fD^{\perp})=0$ ، M_1 هو جيوديسك كلياً داخل M .
بالتالي M_1 هو جيوديسك كلياً داخل $\overline{M}$. ■

نظرية 2-3-3

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن

أي توزيع مورق $D^{\perp}$ هو جيوديسك كلياً في M إذا وفقط إذا كان :

$$g(h(D,D^{\perp}),fD^{\perp})=0$$

البرهان :

بفرض أن $g(h(D, D^{\perp}), fD^{\perp}) = 0$.

$$\because -T\nabla_W Z = A_{fZ}W + th(W, Z) \ \ , \forall W, Z \in D^{\perp}$$

الآن بأخذ الضرب القياسي لـ$Y \in D$ نحصل على :

$$-\ g(T\nabla_W Z, Y) = g(A_{fZ}W, Y) + g(th(W, Z), Y)$$

$$\Longrightarrow g(\nabla_W Z, TY) = g\big(A_{fZ}W, Y\big) - g(h(W, Z), TY)$$

$$\Longrightarrow g(\nabla_W Z, TY) = g\big(A_{fZ}W, Y\big)$$

$$\Longrightarrow g(\nabla_W Z, fY) = g(h(Y, W), fZ)$$

$$\Longrightarrow g(h(Y, W), fZ) = 0 \Leftrightarrow \nabla_W Z \in D^{\perp} \ \ ,$$
$$\forall\ Y \in D, W, Z \in D^{\perp}$$

$$\therefore\ g(h(D, D^{\perp}), fD^{\perp}) = 0 \Leftrightarrow \nabla_W Z \in D^{\perp}$$

وبذلك يكتمل البرهان . ■

لتكن M (ذات البعد m) عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ (ذات البعد $2n+s$) من النوع –T (حيث $m \geq s$) . تكون M ضرب كوشي ريمان (CR-product) إذا كان التوزيع $D \oplus \mu$ تكاملي و M محلياً (locally) هي ضرب ريمان $M_1 \times M_2$ (Riemannian product) حيث M_1 توريق (leaf) للتوزيع $D \oplus \mu$ و M_2 توريق للتوزيع $D^{\perp}$. إذا كانت $pq \neq 0$ فإن M تكون ضرب كوشي ريمان الفعلي (proper CR-product) .

نظرية 3-3-3

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن
العلاقات التالية متكافئة :

1) M هو ضرب كوشي ريمان .

2) $A_{fD^{\perp}}fD = 0$.

3) $X \in TM$, $(\nabla_X T)D \subseteq D$.

4) $X \in TM$, $(\nabla_X T)D^{\perp} \subseteq D^{\perp}$.

البرهان :

1) $\Leftarrow$ (2 :

بفرض أن M هو ضرب كوشي ريمان المحلي الموصوف بواسطة $M_1 \times M_2$ ، حيث M_1 هو توريق للتوزيع $D \oplus \mu$ و M_2 هو توريق للتوزيع $D^{\perp}$.

بالتالي M_1 و M_2 هما جودسيان كلياً في M . إذن $\overline{\nabla}_X Y \in D \oplus \mu$. باستخدام صيغة جاوس نحصل على :

$$0 = g\left(\overline{\nabla}_X Y, W\right) \ , \forall X, Y \in D \oplus \mu \, , W \in D^{\perp}$$

$$0 = g(\nabla_X Y, W) + g(h(X,Y), W)$$

$$\therefore 0 = g(\nabla_X Y, W)$$

إذن μ $D \oplus \mu, \forall X, Y \in D \oplus \mu$ $\nabla_X Y \in$.

أيضاً لدينا $\nabla_W Z \in D^\perp, \forall\, W, Z \in D^\perp$.

الآن

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z Y, W) &= -g(Y, \nabla_Z W) \\ &= -g(\nabla_Z W, Y) \\ &= 0 \quad , \forall\, Y \in D, W, Z \in D^\perp. \end{aligned}$$

أيضاً :

$$\begin{aligned} g\big(\nabla_{\xi_\alpha} Y, W\big) &= g(\nabla_{\xi_\alpha} Y \pm \nabla_Y \xi_\alpha, W) \\ &= g(\nabla_Y \xi_\alpha + [\xi_\alpha, Y], W) \\ &= g([\xi_\alpha, Y], W) \\ &= 0 \quad , Y \in D, W \in D^\perp \end{aligned}$$

الآن لتكن $X \in TM, Y \in D \oplus \mu\ , Z \in D^\perp$ ، إذن نحصل على :

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= g(\nabla_{PX} Y, Z) + g\big(\nabla_{QX} Y, Z\big) + g(\nabla_{\eta_\alpha(X)\xi_\alpha} Y, Z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(\nabla_X Y, Z) = 0 &\Longrightarrow -g(\nabla_X Z, Y) = 0 \\ &\Longrightarrow g(\nabla_X Z, Y) = 0 \end{aligned}$$

لكن

$$g(\nabla_X Z, Y) = g\big(TA_{fZ}X, Y\big) \ , Y \in D, Z \in D^{\perp}, X \in TM$$

$$\therefore g\big(TA_{fZ}X, Y\big) = 0$$

$$\Longrightarrow -g\big(A_{fZ}X, TY\big) = 0$$

$$\Longrightarrow g\big(A_{fZ}X, TY\big) = 0$$

$$\Longrightarrow g\big(A_{fZ}X, fY\big) = 0 \quad ,$$

$$Y \in D, Z \in D^{\perp}, X \in TM$$

$$\Longrightarrow g\big(A_{fZ}X, fY\big) = g\big(A_{fZ}fY, X\big) = 0$$

$$\Longrightarrow A_{fZ}fY = 0 \quad , \forall\, Y \in D, Z \in D^{\perp}$$

$$\Longrightarrow A_{fD}fD = 0$$

2) $\Longleftarrow$ 1) :

نعلم أن التوزيع $D^{\perp}$ تكاملي .

الآن إذا كان $Y \in D$ ، إذن $f^2Y = -Y + \sum \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha \Longleftarrow Y = -f^2Y$.

وأكثر من ذلك إذا كانت $X \in TM\ , Y \in D\ , Z \in D^{\perp}$ ، فإنه من (2) يكون لدينا :

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),fZ) &= g(h(X,-f^2Y),fZ) \\ &= -g(h(X,f^2Y),fZ) \\ &= -g(A_{fZ}f^2Y,X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

الآن إذا كانت $X \in D^{\perp}$ ، إذن :

$$g(h(D^{\perp},D),fD^{\perp}) = 0$$

ومن نظرية (3.3.2) التوزيع $D^{\perp}$ المورق هو جوديسك كلياً داخل M .

ومن ناحية أخرى ، إذا كانت $X \in D$ فإن :

$$g(h(D,D),fD^{\perp}) = 0$$

ومن نظرية (3.3.1) يكون التوزيع $D \oplus \mu$ التكاملي المورق هو جوديسك كلياً داخل M .

إذنM هو ضرب كوشي ريمان .

2) $\Leftrightarrow$ 3) :

من العلاقة :

$$(\nabla_X T)Y = A_{NY}X + th(X,Y) \qquad ,X,Y \in TM$$

إذن إذا كانت $Y \in D, Z \in D^{\perp}$ يكون لدينا :

$$g((\nabla_X T)Y, Z) = g(A_{NY}X, Z) + g(th(X,Y), Z)$$
$$= g(th(X,Y), Z)$$
$$= -g(h(X,Y), fZ)$$
$$= -g(A_{fZ}X, Y)$$
$$= -g(A_{fZ}Y, X)$$

وحيث أن $Y = -f^2Y$ إذن :

$$g\big((\nabla_X T)Y, Z\big) = g\big(A_{fZ}f^2Y, X\big) = -g(A_{fZ}fY, fX)$$

إذا كانت $Z \in D^{\perp}$, $A_{fZ}fY = 0 \Leftrightarrow (\nabla_X T)Y \subset D$.

3) $\Leftrightarrow$ 4) :

بديهياً متحققة لأن $\nabla_X T$ مؤثر(operator) غير متماثل (antisymmetric).■

نظرية 3-3-4

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع T- . إذن
M هي ضرب كوشي ريمان إذا وفقط إذا كانت العلاقات التالية متحققة :

$$\nabla_X Y \in D \oplus \mu \quad , X \in TM, Y \in D \,, \tag{3.3.1}$$

$$th(X,Y) = 0 \quad , X \in TM, Y \in D \,, \tag{3.3.2}$$

$$h(X, fY) = nh(X,Y) \quad , X \in TM, Y \in D. \tag{3.3.3}$$

البرهان :

إذا كانت M هي ضرب كوشي ريمان فإنه من النظرية السابقة $(3.3.3)$ نجد أن العلاقة $(3.3.1)$ متحققة .

العكس :

بفرض أن متحققة $(3.3.1)$ ، إذن التوزيع $D \oplus \mu$ تكاملي ، بالتالي :

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad \in D \oplus \mu \,,$$

$$[X,\xi_\alpha] = \nabla_X \xi_\alpha - \nabla_{\xi_\alpha} X = -\nabla_{\xi_\alpha} X \quad \in D \oplus \mu \,.$$

لأي $X, Y \in D$.

إضافة لذلك إذا كانت M_1 هي توريق للتوزيع $D \oplus \mu$ ، إذن من المعادلة $(3.3.1)$ ومن صيغة جاوس لـ M_1 المحتواه داخل M :

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

لكن من النظرية $(3.3.1)$ $h(X,Y) = 0$ ، إذن M_1 هي جوديسك كلياً داخل M .

الآن من $(3.3.1)$ نحصل على $\nabla_X Z \in D^\perp$ لأي $X \in TM \,, Z \in D^\perp$.

باستخدام صيغة جاوس مرة أخرى لـ M_2 التي هي توريق للتوزيع $D^\perp$:

$$\overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z + h(X,Z) \quad , X \in TM \,, Z \in D^\perp$$

الآن بأخذ الضرب القياسي مع $Y \in D^{\perp}$، نحصل على :

$$g(\overline{\nabla}_X Z, Y) = g(\nabla_X Z, Y) + g(h(X,Z),Y).$$

لكن

$$g(\overline{\nabla}_X Z, Y) = g(\nabla_X Z, Y)$$

$$\therefore\ g(h(X,Z),Y) = 0$$

الآن $Y \in D^{\perp}$ ، إذن $Y = fY$.

$$\therefore\ g(h(X,Z),fY) = 0 \quad ,\forall\ X \in TM, Y, Z \in D^{\perp}$$

$$\Longrightarrow g(h(D,D^{\perp}),fD^{\perp}) = 0$$

إذن من نظرية $(3\,.\,3.2)$ M_1 هي جوديسك كلياً داخل M .

إذن M هي ضرب كوشي ريمان .

الآن من تعريف عديد طيات – T :

$$(\overline{\nabla}_X f)Y = 0$$

$$\Longrightarrow \bar{\nabla}_X fY = f\bar{\nabla}_X Y$$

$$\Longrightarrow \nabla_X fY + h(X, fY)$$
$$= fP\nabla_X Y + fQ\nabla_X Y + th(X,Y) + nh(X,Y).$$

$$\therefore \nabla_X fY = fP\nabla_X Y + th(X,Y) \ ,$$

$$h(X, fY) = fQ\nabla_X Y + nh(X,Y).$$

لأي $X \in TM \,, Y \in D$.

إذن من $(3\,.\,3.\,1)$ نحصل على أن $(3\,.\,3.\,2)$ ، $(3\,.\,3.\,3)$ متحققة . ■

3-4 عديدات الطيات الجزئية من النوع كـوشي ريمـــان العمودية من النوع – T :

3-4 Normal CR- submanifolds of a T- manifold:

إذا كانت P, Q ترمز لمساقط (اسقاط) المورفيزم على TM للتوزيعين $D \,, D^{\perp}$ على التوالي ، إذن لأي $X \in TM$ فإن:

$$.\ X = PX + QP + \sum \eta_\alpha(X)\xi_\alpha$$

وإذا كان v ممتد على M من النوع (1,1) معرّف بالصورة $vX = fPX$ ، وإذا كان u صيغة أحادية (1-form) غير صفرية (non-null) من الحزمة العمودية (normal-bundle) على M معرّف بالصورة $uX = fQX$. فإنه يمكننا اثبات الفرضية التالية بسهولة .

فرضية 3-4-1

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع T- . إذن

$$u \circ v = 0 \quad , \quad \eta_\alpha \circ u = \eta_\alpha \circ v = 0 \text{ , لأي } \alpha$$

$$vX = 0 \Leftrightarrow X \in D^\perp \oplus \mu \quad , \qquad uX = 0 \Leftrightarrow X \in D \oplus \mu \, ,$$

$$g(X,Y) = g(vX,vY) + g(uX,uY) + \Phi(X,Y) \, ,$$

$$F(X,Y) = g(X,vY) \quad , \qquad F(X,Y) = F(vX,vY) \, , \forall \, X,Y \in TM.$$

البرهان :

لتكن $X,Y \in TM$ ، إذن :

$$(u \circ v)X = u(vX) = u(fPX) = fQ(fPX) = 0$$

$$(\eta_\alpha \circ u)X = \eta_\alpha(uX) = \eta_\alpha(fQX) = 0$$

$$(\eta_\alpha \circ v)X = \eta_\alpha(vX) = \eta_\alpha(fPX) = 0$$

حيث $\eta_\alpha \circ f = 0$ لأي α .

لتكن $X \in D^{\perp} \oplus \mu$ ، إذن $PX = 0$ حيث $vX = fPX = 0$.

العكس :

لتكن $vX = 0 \Leftarrow fPX = 0 \Leftarrow PX = 0 \Leftarrow X \in D^{\perp} \oplus \mu$.

ولتكن $X \in D \oplus \mu \Leftrightarrow QX = 0 \Leftrightarrow uX = fQX = 0$.

من تعريف عديد الطيات من نوع –T :

$$g(X,Y) = g(fX,fY) + \Phi(X,Y)\ ,\forall\ \ X,Y \in TM$$

$$,\Phi(X,Y) = \eta(X)\eta(Y)$$

$$= g(fPX + fQX, fPY + fQY) + \Phi(X,Y)$$

$$= g(vX + uX, vY + uY) + \Phi(X,Y)$$

$$= g(vX,vY) + g(vX,uY) + g(uX,vY) + g(uX,uY) + \Phi(X,Y)$$

$$= g(vX,vY) + g(uX,uY) + \Phi(X,Y)$$

ومن تعريف F :

$$F(X,Y) = g(X,fY)\ \ ,\forall X,Y \in TM$$

بالتالي :

$$F(X,Y) = g(X, fPY + fQY + f\eta_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha})$$

$$= g(X, fPY) + g(X, fQY)$$

$$= g(X, fPY)$$

$$= g(X, vY).$$

أخيراً من تعريف F :

$$F(vX, vY) = g(vX, fvY)$$

$$= g(fPX, f(fPY))$$

$$= g(PX, fPY) - \eta_\alpha(PX)\eta_\alpha(fPY)$$

$$= g(PX, fPY)$$

$$= g(X, fY)$$

$$= F(X, Y)$$

وبذلك يكتمل البرهان. ■

تمهيدية 2-4-3

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذا كانت $X, Y \in TM$ إذن :

$$P\nabla_X vY - PA_{uY}X = v\nabla_X Y \,,$$

$$Q\nabla_X vY - QA_{uY}X = th(X, Y) \,,$$

$$h(X, vY) + \nabla_X^{\perp} uY = u\nabla_X Y + nh(X, Y) \,,$$

$$g(fX, fY) = \eta_\alpha(\nabla_X vY - A_{uY}X) \,.$$

ومن هذه التمهيدية (3 . 4. 2) نلاحظ أن:

$$(\nabla_X v)Y = A_{uY}X + th(X, Y) \,,$$

$$(\nabla_X u)Y = nh(X, Y) - h(X, vY) \,.$$

لأي $X, Y \in TM$.

عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان العمودية من النوع –T

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع –T ، تكون عديدات الطيات M **عمودية** إذا كان :

$$N_v(X,Y) = 0$$

لأي $X,Y \in TM$ ، حيث N_v يرمز لممتد Nijenhuis لـ v . نلاحظ أن المعادلة تكافئ المعادلة الآتية :

$$N_v(X,Y) = 0$$

$$[vX,vY] + v^2[X,Y] - v[vX,Y] - v[X,vY] = 0$$

$$\nabla_{vX}vY - \nabla_{vY}vX + v^2\nabla_X Y - v^2\nabla_Y X$$

$$-v\nabla_{vX}Y + v\nabla_Y vX - v\nabla_X vY + v\nabla_{vY}X = 0$$

$$\Longrightarrow (\nabla_{vX}v)Y + v\nabla_{vX}Y - (\nabla_{vY}v)X - v\nabla_{vY}X + v^2\nabla_X Y - v^2\nabla_Y X$$

$$-v^2\nabla_X Y + v(\nabla_Y v)X + v^2\nabla_Y X - v(\nabla_X v)Y - v^2\nabla_X Y + v^2\nabla_Y X$$

$$= 0$$

$$\Longrightarrow (\nabla_{vX}v)Y + v^2\nabla_X Y - (\nabla_{vY}v)X - v^2\nabla_Y X + v^2\nabla_X Y - v^2\nabla_Y X$$

$$-v^2\nabla_X Y + v(\nabla_Y v)X + v^2\nabla_Y X - v(\nabla_X v)Y - v^2\nabla_X Y + v^2\nabla_Y X = 0$$

$$\Longrightarrow (\nabla_{vX}v)Y - (\nabla_{vY}v)X + v(\nabla_Y v)X - v(\nabla_X v)Y = 0$$

نظرية 3-4-3

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع T- . إذن M تكون عمودية إذا وفقط إذا كان :

$$A_{uY}vX = vA_{uY}X$$

لأي $X \in D \,, Y \in D^{\perp}$.

البرهان :

إذا عرفنا المجال الممتد $\beta(X,Y)$ بالصورة :

$$\beta(X,Y) = (\nabla_{vX}v)Y - (\nabla_{vY}v)X + v(\nabla_Y v)X - v(\nabla_X v)Y$$

إذن M تكون عمودية إذا وفقط إذا كانت β تساوي صفر . بالتوسيع المباشر واستخدام المعادلة :

$$(\nabla_X v) = A_{uY}X + th(X,Y)$$

نجد أن :

$$\because \beta(X,Y) = (\nabla_{vX}v)Y - (\nabla_{vY}v)X + v(\nabla_Y v)X - v(\nabla_X v)Y$$

$$= \mathrm{A}_{uY}vX + th(vX,Y) - \mathrm{A}_{uX}vY - th(X,vY)$$

$$+v\mathrm{A}_{uX}Y + vth(X,Y) - v\mathrm{A}_{uY}X - vth(X,Y)$$

$$= \mathrm{A}_{uY} vX - \mathrm{A}_{uX} vY + v\mathrm{A}_{uX} Y - v\mathrm{A}_{uY} X + th(vX, Y) - th(X, vY)$$

$$\therefore \beta(X, Y) = \mathrm{A}_{uY} vX - \mathrm{A}_{uX} vY + v\mathrm{A}_{uX} Y - v\mathrm{A}_{uY} X$$

بفرض أن M عمودية ، إذن :

$$\beta(X, Y) = 0 \quad , \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{TM}.$$

وهذا يعني أن :

$$\mathrm{A}_{uY} vX - \mathrm{A}_{uX} vY + v\mathrm{A}_{uX} Y - v\mathrm{A}_{uY} X = 0$$

الآن لتكن $X \in D\ , Y \in D^{\perp}$ ، إذن من المعادلتين :

$$vX = 0 \Leftrightarrow X \in D^{\perp} \oplus \mu\ ,$$

و

$$uX = 0 \Leftrightarrow X \in D \oplus \mu\ .$$

يكون لدينا $uX = 0$ ، وباستخدام هذه الحقيقة نحصل على :

$$\mathrm{A}_{uY} vX - v\mathrm{A}_{uY} X = 0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{A}_{uY}vX = v\mathrm{A}_{uY}X$$

العكس :

بفرض أن $\mathrm{A}_{uY}vX = v\mathrm{A}_{uY}X$ متحققة. ونثبت أن M عمودية ،أي نثبت أن $\beta(X,Y) = 0$.

الآن باستخدام التحليل (decomposition):

$$TM = D \oplus D^{\perp} \oplus \mu\ .$$

الحالة (1) :

لتكن $X \in D\ ,\ Y \in TM$ ، إذن نحصل على :

$$\beta(X,Y) = \mathrm{A}_{uY}vX - \mathrm{A}_{uX}vY + v\mathrm{A}_{uX}Y - v\mathrm{A}_{uY}X$$

$$\therefore\ \beta(X,Y) = \mathrm{A}_{uY}vX - v\mathrm{A}_{uY}X$$

$$= \mathrm{A}_{u(PY+QY+\eta_\alpha(Y)\xi_\alpha)}vX - v\mathrm{A}_{u(PY+QY+\eta_\alpha(Y)\xi_\alpha)}X$$

$$= \mathrm{A}_{uQY}vX - v\mathrm{A}_{uQY}X$$

$$= \mathrm{A}_{uY}vX - v\mathrm{A}_{uY}X$$

$$\Longrightarrow \beta(X,Y) = 0\ \ , X \in D, Y \in TM.$$

الحالة (2) :

لتكن $X \in TM\ ,\ Y \in D^{\perp}$ ، إذن نحصل على :

$$\beta(X,Y) = \mathrm{A}_{uY}vX - \mathrm{A}_{uX}vY + v\mathrm{A}_{uX}Y - v\mathrm{A}_{uY}X$$

$$= \mathrm{A}_{uY}vX + v\mathrm{A}_{uX}Y - v\mathrm{A}_{uY}X$$

الآن لدينا $V \in TM^{\perp}\ ,\ A_V\xi_\alpha = 0\ ,\ uX = fQX \Longrightarrow uX \in TM^{\perp}$

$$\therefore\ \beta(X,Y) = \mathrm{A}_{uY}vX - v\mathrm{A}_{uY}X$$

$$= \mathrm{A}_{uY}vPX - v\mathrm{A}_{uY}(PX + QX + \eta_\alpha(X)\xi_\alpha)$$

$$= \mathrm{A}_{uY}vPX - v\mathrm{A}_{uY}PX$$

$$\Longrightarrow \beta(X,Y) = 0\ \ , X \in TM\ , Y \in D^{\perp}.$$

الحالة (3) :

لتكن $X, Y \in D^{\perp}$ ، إذن نحصل على :

$$\beta(X,Y) = \mathrm{A}_{uY}vX - \mathrm{A}_{uX}vY + v\mathrm{A}_{uX}Y - v\mathrm{A}_{uY}X$$

$$= v\mathrm{A}_{uX}Y - v\mathrm{A}_{uY}X$$

$$= v(\mathrm{A}_{uX}Y - \mathrm{A}_{uY}X)$$

$$= 0$$

أخيراً لتكن $X \in TM$ إذن :

$$\beta(X, \xi_\alpha) = \mathrm{A}_{u\xi_\alpha} vX - \mathrm{A}_{uX} v\xi_\alpha + v\mathrm{A}_{uX}\xi_\alpha - v\mathrm{A}_{u\xi_\alpha}X$$

وحيث أن $v\xi_\alpha = u\xi_\alpha = 0$ وأيضاً $vA_{uX}\xi_\alpha = 0$ بالتالي :

$$\beta(X, \xi_\alpha) = 0 \ , X \in TM.$$

إذن M عمودية إذا وفقط إذا كان :

$$A_{uY}vX = vA_{uY}X \ , \forall X \in D \ , Y \in D^\perp.$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

نتيجة: 3-4-4

عديد الطيات الجزئية M من النوع -T تكون عمودية إذا وفقط إذا كان :

$$g(h(X, vY) + h(Y, vX), fZ) = 0 \ , \qquad (3.4.1)$$

$$g(h(X, Z), fW) = 0 \ , \qquad (3.4.2)$$

لأي $X, Y \in D \ , W, Z \in D^\perp$.

البرهان :

لتكن M عديد طيات جزئية عمودية من النوع –T . إذن من نظرية (3 . 4 . 3) نجد أن :

$$A_{uZ}vY = vA_{uZ}Y \ \ ,\forall Y \in D \ ,Z \in D^{\perp}.$$

الآن بأخذ الضرب القياسي مع $X \in TM$ ، إذن نحصل على :

$$g(A_{uZ}vY, X) = g(vA_{uZ}Y, X)$$

$$\therefore g(A_{uZ}vY, X) = -g(A_{uZ}Y, vX)$$

$$\Longrightarrow g(h(X, vY), uZ) = -g(h(Y, vX), uZ)$$

$X \in TM, Y \in D, Z \in D^{\perp}$. وبالحساب تكون M عمودية إذا وفقط إذا كان :

$$g(h(X, vY) + h(Y, vX), uZ) = 0 \ \ , \qquad (3 . 4 . 3)$$
$$,X \in TM, Y \in D, Z \in D^{\perp}.$$

من المعادلة (3 . 4 . 3) إذا كانت $X \in D$ ، إذن نحصل على أن الشرط (3 . 4 . 1) متحقق ، حيث $uZ = fZ$.

وإذا كانت $X \in D^{\perp}$ ،إذن $vX = 0$ ، وأيضاً نعلم أن $uZ = fZ \ ,\forall \ Z \in D^{\perp}$ ، بالتالي :

$$g(h(X, vY), fZ) = 0$$

العكس :

بفرض أن $(3\,.\,4.\,1),(3\,.\,4.\,2)$ متحققة . إذن إذا كانت $X \in D$ نحصل على :

$$g(h(X, vY), fZ) = -g(h(Y, vX), fZ)$$

$$g(h(X, vY), uZ) = -g(h(Y, vX), uZ)$$

حيث $X, Y \in D\ , Z \in D^{\perp}$.

الآن من $(3\,.\,4.\,2)$ إذا كانت $X \in D^{\perp}$ إذن نحصل على :

$$g(h(X, Y), fZ) = 0$$

لأي $Y \in D\ , X, Z \in D^{\perp}$ ، ومنها نحصل على :

$$g(h(X, vY), fZ) = 0$$

حيث D لامتغيرة تحت تأثير v .

أيضاً لدينا $vX = 0$ لكل $X \in D^{\perp}$ ، بالتالي :

$$g(h(Y, vX), fZ) = 0$$

إذن :

$$g(h(X, vY), uZ) = -g(h(Y, vX), uZ) = 0$$

حيث $Y \in D\ , X, Z \in D^{\perp}$ ، بالتالي $(3\,.\,4.\,3)$ متحققة إذا كانت $X \in D^{\perp}$ وإذا كانت $X \in D$.

أخيراً إذا كانت $X \in \mu$ فإن $vX = 0$ وبالتالي :

$$g(h(Y, vX), uZ) = 0$$

أيضاً لدينا $h(X, vY) = 0$ لأي $X \in \mu$, $Y \in D$ ، وبالتالي :

$$g(h(X, vY), uZ) = 0 \quad , X \in \mu , Y \in D , Z \in D^{\perp}.$$

إذن $(3 . 4. 3)$ متحققة إذا كانت $X \in \mu$.

بالتالي $(3 . 4. 3)$ متحققة لأي $X \in TM$ ، إذا كانت $(3 . 4. 1)$, $(3 . 4. 2)$ متحققة .

وبذلك يكتمل البرهان .■

تمهيدية 5-4-3

لتكن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T . إذن يتحقق ما يلي :

$$h(fX, Z) = fh(X, Z)$$

$$A_{fZ}X \in D$$

لأي $X \in D , Z \in D^{\perp}$.

البرهان :

بفرض أن M عديدات طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية من عديد الطيات $\overline{M}$ من النوع -T .
إذن من نتيجة $(3 . 4. 4)$ نجد أن :

$$g(h(X, Z), fW) = 0 , \qquad (3 . 4. 4)$$

لأي $X \in D\ , Z, W \in D^{\perp}$.

أيضاً :

$$\overline{\nabla}_Z fX = \nabla_Z fX + h(fX, Z), \qquad (3\,.4.5)$$

لأي $X \in D\ , Z \in D^{\perp}$.

لكن من تعريف عديد طيات – T :

$$\overline{\nabla}_Z fX = f\big(\nabla_Z X + h(X, Z)\big), \qquad (3\,.4.6)$$

لأي $X \in D\ , Z \in D^{\perp}$.

الآن من المعادلتين $(3\,.4.6)$, $(3\,.4.5)$ نحصل على :

$$\nabla_Z fX + h(fX, Z) = f\nabla_Z X + fh(X, Z)\,, \qquad (3\,.4.7)$$

بأخذ الضرب القياسي للمعادلة $(3\,.4.7)$ مع $W \in D^{\perp}$ نحصل على :

$$g(\nabla_Z fX, W) + g(h(fX, Z), W)$$

$$= g(f\nabla_Z X, W) + g(fh(X, Z), W)$$

أو

$$g(\nabla_Z fX, W) = -g(h(X, Z), fW)$$

باستخدام المعادلة $(3\,.4.4)$ نحصل على :

$$g(\nabla_Z fX, W) = 0, \qquad (3\,.4.8)$$

لأي $X \in D\ , Z, W \in D^{\perp}$.

أيضاً نحصل على :

$$g(\nabla_Z fX, \xi_\alpha) = 0, \qquad (3.4.9)$$

لأي $Z \in D^\perp$, $X \in D$.

إذن من المعادلتين $(3.4.9), (3.4.8)$ نجد أن $\nabla_Z fX \in D$ ، بالتالي $\nabla_Z X \in D$ ، المعادلة $(3.4.7)$ تصبح على الصورة :

$$h(fX, Z) = fh(X, Z)$$

لأي $Z \in D^\perp$, $X \in D$.

الآن إذا كانت M عمودية ،فمن المعادلة $(3.4.4)$ نحصل على :

$$g(h(X, Z), fW) = 0$$

لأي $Z, W \in D^\perp$, $X \in D$.

بالتالي باستخدام العلاقة بين h, A نحصل على :

$$g(h(X, Z), fW) = g\big(A_{fZ}X, W\big) = 0 \qquad (3.4.10)$$

لأي $Z, W \in D^\perp$, $X \in D$.

$$g\big(A_{fZ}X, \xi_\alpha\big) = g\big(A_{fZ}\xi_\alpha, X\big) = 0, \qquad (3.4.11)$$

من المعادلتين $(3.4.11), (3.4.10)$ نستنتج أن $A_{fZ}X \in D$
لأي $Z \in D^\perp$, $X \in D$.

وبذلك يكتمل البرهان .■

5-3 الـــعـــلاقة بيــن عديدات الطيـات الجزئية من النوع كوشي ريمـــان العمودية من النوع – T وضرب كوشي ريمان:

3-5 The Relation Between Normal CR- submanifolds and CR-product of a T- manifold:

ضرب كوشي ريمان لعديد طيات من نوع -T عرف كعديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان بحيث أن التوزيع $D\oplus\mu$ يكون تكاملي ، وضرب ريمان $M_1 \times M_2$ (Riemannian product) يكون محلياً ، حيث M_1 توريق (leaf) للتوزيع $D \oplus \mu$ و M_2 توريق للتوزيع $D^{\perp}$.

إضافة لذلك ، في البحث *(Al-Jedani and Al-Ghefari 2010)* استنتجنا أن عديد الطيات M الجزئية من النوع كوشي ريمان من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T هي ضرب كوشي ريمان إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية :

$$A_{fD^{\perp}}fD = 0$$

$$g(h(X,Y), fZ) = 0$$

$$X \in D, Y \in TM, Z \in D^{\perp}.$$

$$\nabla_Y X \in D \oplus \mu, X \in D, Y \in TM$$

فرضية: 3-5-1

ضرب كوشي ريمان في عديد طيات من النوع –T هو عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية .

البرهان :

لتكن M ضرب كوشي ريمان في عديد طيات $\bar{M}$ من نوع –T .

إذن من اثبات النتيجة $(3\,.\,4.\,4)$ نستنتج أن عديد طيات كوشي ريمان الجزئية M من عديد طيات $\bar{M}$ من نوع T– هي ضرب كوشي ريمان إذا وفقط إذا كان :

$$g(h(X,Y),fZ)=0$$

حيث $X\in D, Y\in TM\ , Z\in D^{\perp}$.

الآن إذا كانت $Y\in D^{\perp}$ فإن المعادلة السابقة تكافئ $(3\,.\,4.\,2)$ ، وأيضاً $Y\in D$ إذن $vY\in D$
أيضاً $X\in D, vX\in D$ بالتالي :

$$g(h(vX,Y),fZ)=0$$

لأي $X,Y\in D\ , Z\in D^{\perp}$ ، أيضاً :

$$g(h(X,vY),fZ)=0$$

لأي $X,Y\in D\ , Z\in D^{\perp}$ ، وبالتالي من المعادلتين السابقتين نحصل على :

$$g(h(X,vY),fZ)=-g(h(Y,vX),fZ)=0$$

إذن ضرب كوشي ريمان في عديد طيات نوع T– هو عديد طيات كوشي ريمان الجزئية العمودية .■

فرضية: 3-5-2

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع T– . إذن M هي ضرب كوشي ريمان إذا وفقط إذا كان $D\oplus\mu$ تكاملي .

البرهان :

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T ، و لتكن M هي ضرب كوشي ريمان إذن من التعريف فإن $D \oplus \mu$ تكاملي .

العكس :
بفرض أن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T ، وبفرض أن $D \oplus \mu$ تكاملي أي أن :

$$h(X, fY) = h(Y, fX) \quad , X, Y \in D.$$

الآن لاثبات أن M هي ضرب كوشي ريمان لا بد أن نثبت أن :

$$g(h(X,Y), fZ) = 0 \quad , X \in D, Y \in TM \; , Z \in D^{\perp}.$$

وحيث أن M عمودية إذن من $(3\,.4.2)$ نحصل على :

$$g(h(X,Y), fZ) = 0 \quad , X \in D, Y, Z \in D^{\perp}. \qquad (3\,.5.1)$$

الآن إذا كانت $Y \in \mu$ إذن $h(X,Y) = 0$ وبالتالي :

$$g(h(X,Y), fZ) = 0 \quad , X \in D, Y \in \mu \; , Z \in D^{\perp}. \qquad (3\,.5.2)$$

إذا كانت $Y \in D$ إذن من $(3\,.4.1)$ نحصل على :

$$g(h(X, fY), fZ) = -g(h(Y, fX), fZ).$$

لكن $\mu \oplus D$ تكاملي إذن نحصل على :

$$g(h(X,fY),fZ) = g(h(Y,fX),fZ).$$

بالتالي :

$$g(h(X,fY),fZ) = 0 \quad ,X,Y \in D\ ,Z \in D^{\perp},$$

وحيث أن D لامتغيرة تحت تأثير f ، إذن :

$$g(h(X,Y),fZ) = 0 \quad ,X,Y \in D\ ,Z \in D^{\perp}\ . \qquad (3\,.5.3)$$

بالتالي من $(3\,.5.1), (3\,.5.2), (3\,.5.3)$ نلاحظ أن :

$$g(h(X,Y),fZ) = 0 \quad ,X \in D, Y \in TM\ ,Z \in D^{\perp}$$

إذن M هي ضرب كوشي ريمان .■

الباب الرابع

التقوس المقطعي و ممتد ريسي
والتقوس القياسي
لعديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان
من فضاء الشكل من النوع -T

Sectional Curvature, Ricci Tensor and Scalar Curvature of a CR-Submanifold of a T-Space Form

الباب الرابع

التقوس المقطعي و ممتد ريسي والتقوس القياسي لعديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من فضاء الشكل من النوع -T

Sectional Curvature, Ricci Tensor and Scalar Curvature of a CR-Submanifold of a T-Space Form

4-1 Introduction: 1-4 مقدمة:

قدم Kobayashi *(Kobayashi 1981)* تعريفاً لعديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من نوع عديد طيات Sasakian . وأعاد Alghanemi *(Alghanemi 2008)* تعريف عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من عديد طيات من النوع – S . وبإعادة تعريف عديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من النوع –T كالتالي :

بفرض أن المجالات الاتجاهية $\xi_1, \dots, \xi_s$ المماسية على M ، إذن M تسمى عديد طيات كوشي ريمان الجزئية من $\overline{M}$ إذا وجد زوج من التوزيعات المتعامدة $D, D^{\perp}$ تحقق :

$a\,) TM = D \oplus D^{\perp}$,

حيث $D\ , D^{\perp}$ متعامدة ($\oplus$ ترمز للجمع المتعامد).

$b\,) fD = D$,

أي أن التوزيع D لامتغير تحت تأثير f .

$c\,) fD^{\perp} \subseteq TM^{\perp}$,

أي أن التوزيع $D^{\perp}$ متغير تحت تأثير f .

بناءً على هذا التعريف سندرس في هذا الباب التقوس المقطعي وممتد ريسي والتقوس القياسي لعديد طيات كوشي ريمان الجزئية من فضاء الشكل من النوع–T وقد حصلنا على نتائج جديدة .

2-4 التوزيعان $D, D^{\perp}$:

4-2 The Distribution $D\ and\ D^{\perp}$:

فرضية 4-2-1

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_{α} (horizontal– ξ_{α}) من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T إذن :

$$-A_{fW}Z = fP\nabla_Z W + th(Z, W), \qquad (4.2.1)$$

$$\nabla_Z^{\perp} fW = fQ\nabla_Z W + nh(Z, W), \qquad (4.2.2)$$

البرهان :

من تعريف عديد طيات – T :

$$(\bar{\nabla}_X f)Y = 0\ , \qquad \forall X, Y \in TM$$

$$\therefore\ (\bar{\nabla}_Z f)W = 0\ , \qquad \forall Z, W \in TM$$

$$\Longrightarrow \bar{\nabla}_Z fW = f\bar{\nabla}_Z W$$

ومن صيغتي جاوس وفينجارتن نجد أن :

$$-A_{fW}Z + \nabla_Z^{\perp} fW = f\nabla_Z W + fh(Z, W)$$

$$\Longrightarrow -A_{fW}Z + \nabla_Z^{\perp} fW = fP\nabla_Z W + fQ\nabla_Z W$$

$$+nh(Z, W) + th(Z, W)$$

بمقارنة الأجزاء العمودية والمماسية نحصل على :

$$-A_{fW}Z = fP\nabla_Z W + th(Z,W),$$

$$\nabla_Z^{\perp} fW = fQ\nabla_Z W + nh(Z,W)$$

وبذلك يكتمل البرهان. ■

فرضية 2-2-4

إذا كانت M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية – ξ_α (vertical– ξ_α) من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T إذن :

$$\nabla_X fY = fP\nabla_X Y + th(X,Y), \qquad (4.2.3)$$

$$h(X,fY) = fQ\nabla_X Y + nh(X,Y), \qquad (4.2.4)$$

البرهان :

من تعريف عديد طيات – T :

$$(\bar{\nabla}_X f)Y = 0\,, \qquad \forall X,Y \in TM$$

$$\Longrightarrow \bar{\nabla}_X fY = f\bar{\nabla}_X Y$$

ومن صيغتي جاوس وفينجارتن نجد أن :

$$\nabla_X fY + h(X,fY) = f\nabla_X Y + fh(X,Y)$$

$$\Longrightarrow \nabla_X fY + h(X,fY) = fP\nabla_X Y + fQ\nabla_X Y$$

$$+nh(X,Y) + th(X,Y)$$

بمقارنة الأجزاء العمودية والمماسية نحصل على :

$$\nabla_X fY = fP\nabla_X Y + th(X,Y),$$

$$h(X,fY) = fQ\nabla_X Y + nh(X,Y)$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-2-3

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T إذن التوزيع D يكون تكاملي إذا وفقط إذا كان :

$$h(X,fY) = h(Y,fX), \qquad \forall X,Y \in D \qquad (4.2.5)$$

البرهان :

من$(4.2.4)$ **:**

$$h(X,fY) = fQ\nabla_X Y + nh(X,Y) \qquad (4.2.6)$$

بالتبديل بين كل منX,Y نحصل على :

$$h(Y,fX) = fQ\nabla_Y X + nh(Y,X) \qquad (4.2.7)$$

بطرح $(4.2.7)$, $(4.2.6)$ نحصل على :

$$h(X,fY) - h(Y,fX) = fQ(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = fQ[X,Y]$$

التوزيعD تكاملي $\Leftrightarrow [X,Y] \in D$

$$\Leftrightarrow Q[X,Y] = 0$$

$$\Leftrightarrow fQ[X,Y]=0$$

$$\Leftrightarrow h(fX,Y)-h(X,fY)=0$$

$$\Leftrightarrow h(fX,Y)=h(X,fY)$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-2-4

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع–T
إذا كانت M الأفقية – ξ_α مورقة (foliate) إذن :

$$h(fX,fY)=-h(X,Y), \qquad (4.2.8)$$

البرهان :

نسمي M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد طيات $\bar{M}$ نسميها مورقة (foliate) إذا كان التوزيع D منشأ ، وحيث أن أي توزيع منشأ هو تكاملي ، إذن من المعادلة $(4.2.5)$:

$$h(X,fY)=h(fX,Y)$$

$$\therefore h(fX,fY)=h(f^2X,Y)$$

$$=h(-X+\eta_\alpha(X)\xi_\alpha,Y)$$

$$=h(-X,Y)+h(\eta_\alpha(X)\xi_\alpha,Y)$$

$$=-h(X,Y)$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-2-5

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع–T إذن M هي جيوديسك كلي مختلط إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$A_V X \in D \qquad ,\forall X \in D, V \in TM^{\perp}$$

$$A_V X \in D^{\perp} \quad ,\forall X \in D^{\perp}, V \in TM^{\perp}$$

البرهان :

نفرض أن $Y \in D^{\perp}, X \in D, V \in TM^{\perp}$ إذن :

$$g(A_V X, Y) = g(h(X,Y), V) = 0 \iff A_V X \in D$$

وبالتالي :

$$g(h(X,Y), V) = 0 \iff h(X,Y) = 0$$

$$h(X,Y) = 0 \iff A_V X \in D \qquad ,\forall X \in D, V \in TM^{\perp}$$

أيضاً بفرض أن $Y \in D, X \in D^{\perp}, V \in TM^{\perp}$ إذن :

$$g(A_V X, Y) = g(h(X,Y), V) = 0 \iff A_V X \in D^{\perp}$$

وبالتالي :

$$g(h(X,Y), V) = 0 \iff h(X,Y) = 0$$

$$h(X,Y) = 0 \iff A_V X \in D^{\perp} \qquad ,\forall X \in D^{\perp}, V \in TM^{\perp}$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-2-6

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α (horizontal– ξ_α) من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T إذن التوزيع الأفقي D يكون متوازي إذا وفقط إذا كان :

$$h(X, fY) = h(Y, fX) = fh(X, Y), \qquad (4.2.9)$$

لكل $X, Y \in D$.

البرهان :

حيث أن أي توزيع متوازي هو منشأ إذن من فرضية $(4.2.3)$ نجد أن :

$$h(X, fY) = h(Y, fX) \qquad (4.2.10)$$

بفرض أن D متوازي إذن يكون لدينا :

$$\nabla_X fY \in D \qquad \forall X, Y \in D$$

إذن من المعادلة $(3.2.2)$ نحصل على :

$$th(X, Y) = 0 \qquad (4.2.11)$$

و من المعادلة $(3.2.3)$:

$$\text{متوازي } D \text{ التوزيع} \Leftrightarrow h(X, fY) = nh(X, Y) \qquad (4.2.12)$$

لكن :

$$fh(X, Y) = th(X, Y) + nh(X, Y)$$

ومن المعادلة $(4.2.11)$ نحصل على $fh(X, Y) = nh(X, Y)$ بالتالي من المعادلة $(4.2.12)$ نجد أن :

$$h(X, fY) = fh(X, Y) \qquad (4.2.13)$$

ومن $(4.2.13), (4.2.10)$ وبذلك يكتمل البرهان . ■

فرضية 4-2-7

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α (horizontal– ξ_α) من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع–T إذن M تكون جيوديسك كلي – D إذا وفقط إذا تحقق الشرطين التاليين :

$$\nabla_X fY = fP\nabla_X Y$$

$$h(X, fY) = fQ\nabla_X Y$$

لكل $X, Y \in D$.

البرهان :

من المعادلتين $(4.2.3), (4.2.4)$ نحصل على :

$$\nabla_X fY = fP\nabla_X Y + th(X, Y),$$

$$h(X, fY) = fQ\nabla_X Y + nh(X, Y)$$

وحيث أن $h(X, Y) = 0$ لكل $X, Y \in D$

$$h(X, Y) = 0 \Leftrightarrow \nabla_X fY = fP\nabla_X Y$$

كذلك

$$h(X, Y) = 0 \Leftrightarrow h(X, fY) = fQ\nabla_X Y$$

لكل $X, Y \in D$.

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-2-8

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع–T
إذا كانت M هي عمودية– ξ_α إذن التوزيع $D^{\perp}$ يكون تكاملي إذا وفقط إذا كان :

$$\mathrm{A}_{fX}Y = \mathrm{A}_{fY}X \qquad \forall X, Y \in D^{\perp}$$

البرهان :

إذا كانت $X, Y \in D^{\perp}$ ، إذن المعادلتين $(3\,.2.1), (3\,.2.2)$ تكونان على الصورة :

$$\mathrm{PA}_{fY}X + fP\nabla_X Y = 0$$

$$\mathrm{QA}_{fY}X + th(X, Y) = 0$$

بالجمع :

$$\mathrm{A}_{fY}X + fP\nabla_X Y + th(X, Y) = 0$$

بالتبديل بين كل من X, Y نحصل على :

$$\mathrm{A}_{fX}Y + fP\nabla_Y X + th(Y, X) = 0$$

بالطرح نحصل على :

$$\mathrm{A}_{fY}X - \mathrm{A}_{fX}Y + fP(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = 0$$

تكاملي $D^{\perp}$ التوزيع $\Leftrightarrow \quad [X, Y] \in D^{\perp}$

$$\Leftrightarrow P[X, Y] = 0$$

$$\Leftrightarrow fP[X,Y] = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}_{fY}X = \mathrm{A}_{fX}Y$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-2-9

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α (horizontal– ξ_α) من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع –T إذن التوزيع $D^\perp$ يكون متوازي إذا وفقط إذا كان :

$$-\mathrm{A}_{fW}Z = th(Z,W), \qquad \forall Z,W \in D^\perp$$

البرهان :

من المعادلة (4 . 2. 1) نحصل على :

$$-A_{fW}Z = fP\nabla_Z W + th(Z,W)$$

بالتالي :

$$\nabla_Z W \in D^\perp \Leftrightarrow P\nabla_Z W = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mathrm{A}_{fW}Z = th(Z,W), \qquad \forall Z,W \in D^\perp$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 10-2-4

إذا كانت M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية – ξ_α (vertical– ξ_α) من عديد طيات $\bar{M}$ من النوع–T إذن التوزيع $D^{\perp}$ يكون متوازي إذا وفقط إذا كان:

$$\mathrm{A}_{fW}Z \in D^{\perp}\ , \qquad \forall Z, W \in D^{\perp}$$

البرهان :

بفرض أن $Z, W \in D^{\perp}$ ، إذن من صيغتي جاوس وفينجارتن نحصل على :

$$-A_{fW}Z + \nabla_Z^{\perp} fW = f\nabla_Z W + fh(Z, W)$$

بأخذ الضرب القياسي مع $Y \in D$ نحصل على :

$$g(-A_{fW}Z, Y) + g(\nabla_Z^{\perp} fW, Y) = g(f\nabla_Z W, Y) + g(fh(Z, W), Y)$$

$$\Longrightarrow -g\left(A_{fW}Z, Y\right) = g(f\nabla_Z W, Y)$$

$$= -g(\nabla_Z W, fY)$$

$$\therefore\ g\left(A_{fW}Z, Y\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{A}_{fW}Z \in D^{\perp}$$

بالتالي :

$$\nabla_Z W \in D^{\perp} \Leftrightarrow \mathrm{A}_{fW}Z \in D^{\perp}, \qquad \forall Z, W \in D^{\perp}$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

3-4 التقوس المقطعي لعديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من فضاء الشكل من النوع-T:

4-3 Sectional Curvature of a CR-submanifold of a T-Space Form:

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان من فضاء الشكل N(k) من النوع–T (T-space form) .إذن معادلة جاوس(Gauss) تعطى بالصورة :

$$R(X,Y,Z,W) = \overline{R}\ (X,Y,Z,W) + g\big(h(Y,Z),h(X,W)\big)$$

$$-g\big(h(X,Z),h(Y,W)\big).$$

$$\begin{aligned} \therefore\ R(X,Y,Z,W) = \frac{k}{4}[&g(fX,fZ)g(fW,fY)\\ &-g(fX,fZ)g(fW,fY)\\ &+F(W,X)F(Y,Z)\\ &+F(Y,W)F(X,Z)\\ &-2F(X,Y)F(W,Z)]\\ &+g\big(h(Y,Z),h(X,W)\big)\\ &-g\big(h(X,Z),h(Y,W)\big). \end{aligned}$$

لكل $X,Y,Z,W \in TM$.

لتكن $K_M(X \wedge Y)$ هي التقوس المقطعي (sectional curvature) المعرف بواسطة المتجهين العياريين المتعامدين(orthonormal vectors) $X,Y \in TM$ ، إذن :

$$K_M(X \wedge Y) = R(X,Y,Y,X)$$

$$\therefore K_M(X \wedge Y) = \frac{k}{4}\ [g(fX, fY)g(fX, fY)$$
$$-g(fX, fX)g(fY, fY)$$
$$+F(X, X)F(Y, Y)$$
$$+F(Y, X)F(X, Y)$$
$$-2F(X, Y)F(X, Y)]$$
$$+g\big(h(X, X), h(Y, Y)\big)$$
$$-g\big(h(X, Y), h(Y, X)\big).$$

وبعد إجراء بعض الحسابات نحصل على :

$$K_M(X \wedge Y) = \frac{k}{4}\ [\big(g(X, Y) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\big)\big(g(X, Y)$$
$$- \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\big)$$
$$- \big(g(X, X) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(X)\big)\big(g(Y, Y)$$
$$- \eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Y)\big) + 0 + g(PY, fPX)g(PX, fPY)$$
$$- 2g(PX, fPY)g(PX, fPY)] + g\big(h(X, X), h(Y, Y)\big)$$
$$- g\big(h(X, Y), h(Y, X)\big).$$

$$= \frac{k}{4}\ \big[\big(0 - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\big)\big(0 - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)\big)$$
$$-\ (1 - \eta_\alpha(X)^2)(1 - \eta_\alpha(Y)^2) - 3g(PX, fPY)^2\big]$$
$$+ g\big(h(X, X), h(Y, Y)\big) - \|h(Y, X)\|^2.$$

$$= \frac{k}{4}\ [\ \eta_\alpha(X)^2\eta_\alpha(Y)^2 - 1 + \eta_\alpha(X)^2 + \eta_\alpha(Y)^2$$
$$-\eta_\alpha(X)^2\eta_\alpha(Y)^2 - 3g(PX, fPY)^2]$$
$$+g\big(h(X, X), h(Y, Y)\big) - \|h(Y, X)\|^2.$$

$$= \frac{k}{4}\ [\eta_\alpha(X)^2\eta_\alpha(Y)^2 - 1 - 3g(PX, fPY)^2]$$
$$+g\big(h(X,X), h(Y,Y)\big) - \|h(Y,X)\|^2. \qquad (4\,.3.1)$$

فرضية 4-3-1

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية – ξ_α (vertical– ξ_α) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T (T-space form) ، إذن :

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4}\ [1 + 3g(PX, fPY)^2]$$
$$+g\big(h(X,X), h(Y,Y)\big)$$
$$-\|h(Y,X)\|^2 \quad , \quad \forall X, Y \in D.$$

البرهان :

حيث أن Mعديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية– ξ_α و $X, Y \in D$ ، إذن بتطبيق حقيقية أن :

$$\eta_\alpha(X) = g\big(X, \xi_\alpha\big) = 0\ ,$$

$$\eta_\alpha(Y) = g\big(Y, \xi_\alpha\big) = 0$$

في المعادلة $(4\,.3.1)$ ، وبذلك تتحقق الفرضية .■

فرضية 4-3-2

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α (horizontal– ξ_α) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T (T-space form) ، إذن :

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4} + g\big(h(X,X), h(Y,Y)\big)$$

$$-\|h(Y,X)\|^2 \ , \qquad \forall X, Y \in D^{\perp}.$$

البرهان :

حيث أن Mعديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α و $X, Y \in D^{\perp}$ ، إذن بتطبيق حقيقية أن :

$$\eta_\alpha(X) = \eta_\alpha(Y) = 0 \ ,$$

$$g(PX, fPY) = 0$$

في المعادلة (4 . 3. 1) ، وبذلك تتحقق الفرضية.■

فرضية 4-3-3

التقوس المقطعي – f (f –sectional curvature) المعرف بواسطة متجه الوحدة X (unit vector) يكون على الصورة :

$$H(X) = -k + g\big(h(X,X), h(Y,Y)\big) - \|h(Y,X)\|^2 \,.$$

البرهان :

حيث أن لدينا :

$$H(X) = K_M(X \wedge fX)$$

$$\begin{aligned}\therefore H(X) = \frac{k}{4}\ [&g(fX, f^2X)g(fX, f^2X) \\ &-g(fX, fX)g(f^2X, f^2X) \\ &+F(X, X)F(fX, fX) \\ &+F(fX, X)F(X, fX) \\ &-2F(X, fX)F(X, fX)] \\ &+g\big(h(X, X), h(fX, fX)\big) \\ &-g\big(h(X, fX), h(fX, X)\big)\end{aligned}$$

بالتالي بعد تبسيط هذه المعادلة نحصل على :

$$\therefore H(X) = \frac{k}{4}\ [g(fX, f^2X)^2 - g(fX, fX)g(f^2X, f^2X)$$

$$+0 - 3g(X, f^2X)^2] + g\big(h(X, X), h(fX, fX)\big)$$

$$-\|h(X, fX)\|^2\ .$$

$$\begin{aligned}= \frac{k}{4}\ [&(g(X, fX) - \eta(X)\eta(fX))^2 - (g(X, X) \\ &-\eta(X)\eta(X))(g(-X + \eta_\alpha(X)\xi_\alpha, -X + \eta_\alpha(X)\xi_\alpha)) \\ &-3g(X, f^2X)^2] + g\big(h(X, X), h(fX, fX)\big) \\ &-\|h(X, fX)\|^2\ .\end{aligned}$$

$$= \frac{k}{4}\,[g(X,fX)^2 - 1 - 3g(X,f^2X)^2]$$
$$+g\big(h(X,X),h(fX,fX)\big) - \|h(X,fX)\|^2 \ .$$

$$= \frac{k}{4}\,[-1 - 3g(X,f^2X)^2]$$
$$+g\big(h(X,X),h(fX,fX)\big) - \|h(X,fX)\|^2 \ .$$

$$= -\frac{k}{4}\,(1+3) + g\big(h(X,X),h(fX,fX)\big)$$
$$-\|h(X,fX)\|^2 \ .$$

$$= -k + g\big(h(X,X),h(fX,fX)\big) - \|h(X,fX)\|^2 \ .$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-3-4

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان العمودية – ξ_α أدنى - D (D -minimal ξ_α -vertical) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T ، إذن M هي جيوديسك كلي - D (D -totally geodesic) إذا وفقط إذا كان:

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4} \quad , \quad \forall X, Y \in D.$$

مع الشرط

$$g(X, f\mathrm{Y}) = 0 \ .$$

البرهان :

$\Leftarrow$) بفرض أن M هي عمودية – ξ_α جيوديسك كلي – D (ξ_α –vertical D- totally geodesic) ، إذن من فرضية (4 . 3. 1) نحصل على :

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4} \quad , \quad \forall X, Y \in D.$$

مع الشرط

$$g(X, f\mathrm{Y}) = 0 \,.$$

$\Rightarrow$) بفرض أن العلاقة :

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4} \quad , \quad \forall X, Y \in D.$$

مع الشرط

$$g(X, f\mathrm{Y}) = 0 \,.$$

متحققة ، بالرجوع للفرضية (4 . 2. 1) نحصل على :

$$g\big(h(X,X), h(Y,Y)\big) - g\big(h(X,Y), h(X,Y)\big) = 0 \,.$$

وحيث أن M هي أدنى – D ، إذن :

$$\sum_{i,j=1}^{2p} h\big(E_i, E_j\big) = 0$$

بالتالي $h\big(E_i, E_j\big) = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $h(X,,Y) = 0$ مما يعني أن M تكون جيوديسك كلي – D لكل $X, Y \in D$.

فرضية 4-3-5

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α أدنى - $D^\perp$ ($D^\perp$ –minimal ξ_α -horizontal) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T ، إذن M هي جيوديسك كلي - $D^\perp$ ($D^\perp$ -totally geodesic) إذا وفقط إذا كان:

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4} \quad , \quad \forall X, Y \in D^\perp.$$

البرهان :

⟸) بفرض أن M هي أفقية – ξ_α جيوديسك كلي – $D^\perp$ (ξ_α – horizontal $D^\perp$- totally geodesic) ، إذن من فرضية $(4\,.\,3.\,2)$ نحصل على :

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4} \quad , \quad \forall X, Y \in D^\perp.$$

⟹) بفرض أن العلاقة :

$$K_M(X \wedge Y) = -\frac{k}{4} \quad , \quad \forall X, Y \in D.$$

متحققة ، بالرجوع للفرضية $(4\,.\,3.\,2)$ نحصل على :

$$g\big(h(X,X), h(Y,Y)\big) - g\big(h(X,Y), h(X,Y)\big) = 0\,.$$

وحيث أن M هي أدنى – $D^\perp$ ، إذن :

$$\sum_{i,j=1}^{m-2p-s} h\big(E_{2p+i}, E_{2p+j}\big) = 0$$

بالتالي $h(E_{2p+i}, E_{2p+j}) = 0$ وهذا يؤدي إلى أن $h(X,Y) = 0$ مما يعني أن M تكون جيوديسك كلي – $D^{\perp}$ لكل $X, Y \in D^{\perp}$

4-4 ممتد ريسي والتقوس القياسي لعديد الطيات الجزئية من النوع كوشي ريمان من فضاء الشكل من النوع -T:

4-4 Ricci Tensor and Scalar Curvature of CR-submanifold of a T- space Form:

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α (horizontal– ξ_α) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T (T-space form) .
وأيضاً لتكن $E_i, i = 1,2, \dots, m$ مجال شكل محلي (a local frame field) من الشكل العياري المتعامد (orthonormal frame) على M ، و U, V مجالات اتجاهية تنتمي إلى TM .

إذن بالحساب المباشر نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{m} g(E_i, fPU)g(fPV, E_i) = g(fPU, fPV)$$

$$= g(PU, PV) - \eta_\alpha(PU)\eta_\alpha(PV)$$

بالتالي :

$$\sum_{i=1}^{m} g(fPE_i, E_i) = 0 .$$

باستخدام المعادلة السابقة نحصل على ممتد ريسي (Ricci tensor) بالصورة :

$$S(U,V)=\sum_{i=1}^{m} R(E_i,U,V,E_i)\,.$$

من المعادلة (4 . 3. 1) نحصل على :

$$\begin{aligned}S(U,V)=\sum_{i=1}^{m}\{\frac{k}{4}\ &[g(fE_i,fV)g(fE_i,fU)\\ &-g(fE_i,fE_i)g(fU,fV)\\ &+F(E_i,E_i)F(U,V)\\ &+F(U,E_i)F(E_i,V)\\ &-2F(E_i,U)F(E_i,V)]\\ &+g\big(h(E_i,E_i),h(U,V)\big)\\ &-g\big(h(E_i,V),h(U,E_i)\big)\}\,. \qquad (4\,.4.\,1)\end{aligned}$$

وبعد إجراء بعض الحسابات على المعادلة السابقة نحصل على :

$$\begin{aligned}S(U,V)=\frac{k}{4}\{\sum_{i=1}^{m}\ &[(g(E_i,V)-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(V))(g(E_i,U)\\ &-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(U))-(g(E_i,E_i)\\ &-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(E_i)\big)(g(U,V)-\eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V))\end{aligned}$$

$$+g(E_i, fE_i)g(U, fV) + g(U, fE_i)g(E_i, fV)$$

$$-2g(E_i, fU)g(E_i, fV)]$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\{g\big(h(E_i, E_i), h(U, V)\big)$$

$$-g\big(h(E_i, V), h(U, E_i)\big)\}$$

$$\therefore S(U, V) = \frac{k}{4}\{\sum_{i=1}^{m}\ [g(E_i, V)g(E_i, U)$$

$$-g(E_i, V)\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(U)$$

$$-g(E_i, U)\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(V)$$

$$+\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(V)\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(U)$$

$$-(g(E_i, E_i) - \eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(E_i)\big)g(U, V)$$

$$+(g(E_i, E_i) - \eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(E_i)\big)\eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V)$$

$$+0 - g(fU, E_i)g(E_i, fV)$$

$$-2g(E_i, fU)g(E_i, fV)]\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\{g\big(h(E_i, E_i), h(U, V)\big)$$

$$-g\big(h(E_i, V), h(U, E_i)\big)\}.$$

$$= \frac{k}{4}\ [g(U,V) - \eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V)$$

$$-\eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V) + \eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V)$$

$$-(m-s)g(U,V) + (m-1)\eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V)$$

$$-g(U,V) + \eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V) - 2g(U,V)$$

$$+2\eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V)]$$

$$+\textstyle\sum_{i=1}^{m}\{g\big(h(E_i,E_i),h(U,V)\big)$$

$$-g\big(h(E_i,V),h(U,E_i)\big)\}.$$

$$= \frac{k}{4}\{[1-m+s-3]g(U,V)$$

$$+[-1+m-1+3]\eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V)\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\{g\big(h(E_i,E_i),h(U,V)\big)$$

$$-g\big(h(E_i,V),h(U,E_i)\big)\}.$$

$$= \frac{k}{4}\{(s-m-2)g(U,V)$$

$$+(m+1)\eta_\alpha(U)\eta_\alpha(V)\}$$

$$+mg\big(H_M, h(U,V)\big) - \sum_{i=1}^{m} g\big(h(E_i,V), h(U,E_i)\big). \qquad (4\,.\,4.\,2)$$

باستخدام المعادلة $(4\,.\,4.\,2)$ نستنتج التقوس القياسي (scalar curvature) كالآتي :

$$\rho = \sum_{j=1}^{m} S(E_i, E_i)$$

$$= \frac{k}{4}\sum_{j=1}^{m}[\,(s-m-2)g\big(E_j,E_j\big)$$

$$+(m+1)\eta_\alpha\big(E_j\big)\eta_\alpha\big(E_j\big)]$$

$$+\sum_{j=1}^{m} m\, g\left(H_M, h\big(E_j,E_j\big)\right)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{m} g\left(h\big(E_i,E_j\big), h\big(E_j,E_i\big)\right).$$

$$\rho = \frac{k}{4}[(s-m-2)m + (m+1)(1)]$$

$$+m^2 g(H_M, H_M)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{m} g\left(h(E_i, E_j), h(E_j, E_i)\right). \qquad (4\,.4.3)$$

الآن باعتبار أن :

$$S(U,V) = S_D(U,V) + S_{D^\perp}(U,V)$$

$$= \sum_{i=1}^{2p+s} R(E_i, U, V, E_i) + \sum_{k=1}^{q} R(F_k, U, V, F_k). \quad (4\,.4.4)$$

أيضاً يكون لدينا :

$$\rho = \sum_{i=1}^{2p+s} S(E_i, E_i) + \sum_{k=1}^{q} S(E_k, E_k)\,.$$

نحصل على ممتد ريسي كالآتي :

لتكن $X, Y \in D$, $Z, W \in D^\perp$ باستخدام المعادلة $(4\,.4.4)$ نجد أن :

$$S_D(X,Y) = \sum_{i=1}^{2p+s} R(E_i, X, Y, E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{2p+s} \{\frac{k}{4} \ [g(fE_i, fY)g(fE_i, fX)$$

$$-g(fE_i, fE_i)g(fX, fY)$$

$$+F(E_i, E_i)F(X, Y)$$

$$+F(X, E_i)F(E_i, Y)$$

$$-2F(E_i, X)F(E_i, Y)]$$

$$+g\big(h(E_i, E_i), h(X, Y)\big)$$

$$-g\big(h(E_i, Y), h(X, E_i)\big)\} .$$

$$= \frac{k}{4}\{\sum_{i=1}^{2p+s} \ [(g(E_i, Y) - \eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(Y))(g(E_i, X)$$

$$-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(X)) - (g(E_i, E_i)$$

$$-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(E_i)\big)(g(X, Y) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y))$$

$$+0 + g(X, fE_i)g(E_i, fY)$$

$$-2g(E_i, fX)g(E_i, fY)]\}$$

$$+\textstyle\sum_{i=1}^{2p+s}\{g\big(h(E_i, E_i), h(X, Y)\big)$$

$$-g\big(h(E_i, Y), h(X, E_i)\big)\} .$$

$$= \frac{k}{4}\sum_{i=1}^{2p+s} [g(E_i, Y)g(E_i, X)$$

$$-g(E_i, Y)\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(X) + \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$+\frac{k}{4}[-(2p + s - s)g(X, Y)$$

$$+(2p + s - 1)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)$$

$$-3g(X, Y) + 3\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$+\sum_{i=1}^{2p+s}\{g\big(h(E_i, E_i), h(X, Y)\big)$$

$$-g\big(h(E_i, Y), h(X, E_i)\big)\}.$$

$$= \frac{k}{4}\sum_{i=1}^{2p+s} [g(X, Y) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)$$

$$-\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$+\frac{k}{4}[(-2p - 3)g(X, Y)$$

$$+(2p + s - 1 + 3)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$+\sum_{i=1}^{2p+s}\{g\big(h(E_i, E_i), h(X, Y)\big)$$

$$-g\big(h(E_i, Y), h(X, E_i)\big)\}.$$

$$= \frac{k}{4}[-(2p+3)g(X,Y)$$

$$+(2p+s+2)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$+(2p+s)g\big(H_D, h(X,Y)\big)$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,Y), h(X,E_i)\big). \qquad (4\,.4.5)$$

$$S_D(X,Z) = \sum_{i=1}^{2p+s} R(E_i, X, Z, E_i)$$

$$= (2p+s)g\big(H_D, h(X,Z)\big)$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,Z), h(X,E_i)\big). \quad (4\,.4.6)$$

$$S_D(Z,W) = \sum_{i=1}^{2p+s} \{\frac{k}{4}\,[g(fE_i,fW)g(fE_i,fZ)$$

$$-g(fE_i,fE_i)g(fZ,fW)$$

$$+F(E_i,E_i)F(Z,W)$$

$$+F(Z,E_i)F(E_i,W)$$

$$-2F(E_i,Z)F(E_i,W)]$$

$$+g\big(h(E_i,E_i),h(Z,W)\big)$$

$$-g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big)\}\,.$$

$$=\frac{k}{4}\{\sum_{i=1}^{2p+s}[(g(E_i,W)-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(W))(g(E_i,Z)$$

$$-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(Z))-(g(E_i,E_i)$$

$$-\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(E_i)\big)(g(Z,W)-\eta_\alpha(Z)\eta_\alpha(W))$$

$$+0-3g(X,fZ)g(fW,E_i)]\}$$

$$+(2p+s)g\big(H_D,h(Z,W)\big)$$

$$-\textstyle\sum_{i=1}^{2p+s}g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big)\,.$$

$$=\frac{k}{4}\sum_{i=1}^{2p+s}[g(E_i,W)g(E_i,Z)$$

$$-(g(E_i,E_i)\eta_\alpha(E_i)\eta_\alpha(E_i))g(Z,W)$$

$$-3g(Z,W)+3\eta_\alpha(Z)\eta_\alpha(W)]$$

$$+(2p+s)g\big(H_D,h(Z,W)\big)$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big)\,.$$

$$=\tfrac{k}{4}[1-(2p+s-s)-3]g(Z,W)$$

$$+(2p+s)g\big(H_D,h(Z,W)\big)$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big)\,.$$

$$=\frac{k}{4}[-2(p+1)]g(Z,W)$$

$$+(2p+s)g\big(H_D,h(Z,W)\big)$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big)\,.$$

$$=-\frac{k}{2}(p+1)g(Z,W)$$

$$+(2p+s)g\big(H_D,h(Z,W)\big)$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big)\,. \quad (4\,.4.7)$$

$$S_{D^{\perp}}(Z,W) = \sum_{k=1}^{q} R(E_k, Z, W, E_k)$$

$$\therefore S_{D^{\perp}}(Z,W) = \sum_{k=1}^{q} \{\frac{k}{4}\ [g(fE_k, fW)g(fE_k, fZ)$$

$$-g(fE_k, fE_k)g(fZ, fW)$$

$$+F(E_k, E_k)F(Z, W)$$

$$+F(Z, E_k)F(E_k, W)$$

$$-2F(E_k, Z)F(E_k, W)]$$

$$+g\big(h(E_k, E_k), h(Z, W)\big)$$

$$-g\big(h(E_k, W), h(Z, E_k)\big)\} .$$

$$= \frac{k}{4}\sum_{k=1}^{q}\ [(g(E_k, W) - \eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(W))(g(E_k, Z)$$

$$-\eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(Z)) - (g(E_k, E_k)$$

$$-\eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(E_k)\big)(g(Z, W) - \eta_\alpha(Z)\eta_\alpha(W))$$

$$+0 - 3g(E_k, fZ)g(fW, E_k)]\}$$

$$+qg\Big(H_{D^{\perp}}, h(Z, W)\Big)$$

$$-\textstyle\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, W), h(Z, E_k)\big) .$$

$$= \frac{k}{4}(s-q)g(Z,W)$$

$$+qg\left(H_{D^{\perp}}, h(Z,W)\right)$$

$$-\textstyle\sum_{k=1}^{q} g\left(h(E_k,W), h(Z,E_k)\right) . \quad (4.4.8)$$

$$S_{D^{\perp}}(X,Z) = \sum_{k=1}^{q} R(E_k, X, Z, E_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \{\frac{k}{4}\ [g(fE_k, fZ)g(fE_k, fX)$$

$$-g(fE_k, fE_k)g(fX, fZ)$$

$$+F(E_k, E_k)F(X,Z)$$

$$+F(X, E_k)F(E_k, Z)$$

$$-2F(E_k, X)F(E_k, Z)]$$

$$+g\left(h(E_k, E_k), h(X,Z)\right)$$

$$-g\left(h(E_k, Z), h(X, E_k)\right)\} .$$

$$= \frac{k}{4} \sum_{k=1}^{q} \ [(g(E_k, Z) - \eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(Z))(g(E_k, X)$$

$$-\eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(X)) - (g(E_k, E_k)$$

$$-\eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(E_k)\big)(g(X, Z) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Z))$$

$$+0 - 3g(E_k, fX)g(fZ, E_k)]\}$$

$$+qg\Big(H_{D^\perp}, h(X, Z)\Big)$$

$$-\textstyle\sum_{k=1}^{q} g\Big(h(E_k, Z), h(X, E_k)\Big) .$$

$$= qg\Big(H_{D^\perp}, h(X, Z)\Big)$$

$$-\sum_{k=1}^{q} g\Big(h(E_k, Z), h(X, E_k)\Big) . \qquad (4\,.4.9)$$

$$S_{D^\perp}(X, Y) = \sum_{k=1}^{q} R(E_k, X, Y, E_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \{\frac{k}{4} \, [g(fE_k, fY)g(fE_k, fX)$$

$$-g(fE_k, fE_k)g(fX, fY)$$

$$+F(E_k, E_k)F(X, Y)$$

$$+F(X, E_k)F(E_k, Y)$$

$$-2F(E_k, X)F(E_k, Y)]$$

$$+g\big(h(E_k, E_k), h(X, Y)\big)$$

$$-g\big(h(E_k, Y), h(X, E_k)\big)\} \, .$$

$$= \frac{k}{4} \sum_{k=1}^{q} \, [(g(E_k, Y) - \eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(Y))(g(E_k, X)$$

$$-\eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(X)) - (g(E_k, E_k)$$

$$-\eta_\alpha(E_k)\eta_\alpha(E_k)\big)(g(X, Y) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y))$$

$$+0 - 3g(E_k, fX)g(fY, E_k)]\}$$

$$+qg\Big(H_{D^\perp}, h(X, Y)\Big)$$

$$-\textstyle\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, Y), h(X, E_k)\big) \, .$$

$$= \frac{k}{4}[\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - g(X,Y)]q + qg\Big(H_{D^\perp}, h(X,Y)\Big)$$

$$- \sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k,Y), h(X,E_k)\big) \,. \qquad (4\,.4.10)$$

استناداً على صيغ ممتد ريسي السابقة ، نستنتج التقوس القياسي كالآتي :

$$\rho_{DD} = \sum_{j=1}^{2p+s} S_D\big(E_j, E_j\big)$$

$$= \sum_{j=1}^{2p+s} \{\frac{k}{4}[-(2p+3)g\big(E_j,E_j\big)$$

$$+(2p+s+2)\eta_\alpha\big(E_j\big)\eta_\alpha\big(E_j\big)]$$

$$+(2p+s)g\left(H_D, h\big(E_j,E_j\big)\right)\}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2p+s} g\left(h\big(E_i,E_j\big), h\big(E_j,E_i\big)\right).$$

$$= \frac{k}{4}[-(2p+3)(2p+s)$$

$$+(2p+s+2)s]$$

$$+(2p+s)^2 g(H_D,H_D)\}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2p+s} g\left(h\big(E_i,E_j\big), h\big(E_j,E_i\big)\right).$$

$$= \frac{k}{4}[-2p(2p+3)+(s-1)s]$$

$$+(2p+s)^2 g(H_D, H_D)\}$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2p+s} g\left(h(E_i, E_j), h(E_j, E_i)\right). \quad (4.4.11)$$

$$\rho_{D^\perp D} = \sum_{j=1}^{2p+s} S_{D^\perp}(E_j, E_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{2p+s} \{\frac{k}{4}[\eta_\alpha(E_j)\eta_\alpha(E_j) - g(E_j, E_j)]q$$
$$+qg\left(H_{D^\perp}, h(E_j, E_j)\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{q} g\left(h(E_k, E_j), h(E_j, E_k)\right)\}.$$

$$= \frac{k}{4}[s-(2p+s)]q$$
$$+q(2p+s)g(H_{D^\perp}, H_D)$$

$$-\sum_{j=1}^{2p+s}\sum_{k=1}^{q} g\left(h(E_k, E_j), h(E_j, E_k)\right).$$

$$= -\frac{k}{2}pq + q(2p+s)g(H_{D^\perp}, H_D)$$

$$-\sum_{j=1}^{2p+s}\sum_{k=1}^{q} g\left(h(E_k, E_j), h(E_j, E_k)\right). \quad (4.4.12)$$

أيضاً :

$$\rho_{DD^{\perp}} = \sum_{l=1}^{q} S_D(E_l, E_l)$$

$$= \sum_{l=1}^{q} \{ \frac{k}{4} [-2(p+1) g(E_l, E_l)$$

$$+(2p+s) g\big(H_D, h(E_l, E_l)\big)$$

$$- \textstyle\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\big) \} .$$

$$= \frac{k}{4} [-2(p+1)] q$$

$$+(2p+s) q g(H_D, H_{D^{\perp}})$$

$$- \textstyle\sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\big) .$$

$$= -\frac{k}{2} (p+1) q$$
$$+(2p+s) q g(H_D, H_{D^{\perp}})$$

$$- \textstyle\sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\big) \quad . (4.4.13)$$

$$\rho_{D^{\perp}D^{\perp}} = \sum_{l=1}^{q} S_{D^{\perp}}(E_l, E_l)$$

$$= \textstyle\sum_{l=1}^{q}\{ \frac{k}{4}(s-q)g(E_l, E_l)$$

$$+qg\Big(H_{D^{\perp}}, h(E_l, E_l)\Big)$$

$$-\textstyle\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, E_l), h(E_l, E_k)\big)\} .$$

$$= \frac{k}{4}(s-q)q$$

$$+q^2 g(H_{D^{\perp}}, H_{D^{\perp}})$$

$$-\textstyle\sum_{k,l=1}^{q} g\big(h(E_k, E_l), h(E_l, E_k)\big) \ . (4\ .3.\ 14)$$

فرضية 1-4-4

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_{α} أدنى - $D^{\perp}$ ($D^{\perp}$ –minimal ξ_{α} -horizontal) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T ، إذن:

$$(i) S_{D^{\perp}}(Z, W) - \frac{k}{4}(s-q)g(Z, W)$$

يكون شبه سالب بالتحديد (negative semi – definite) لكل $Z, W \in D^{\perp}$.

$$(ii) S_{D^\perp}(X,Y) - \frac{k}{4}[\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - g(X,Y)]q$$

يكون شبه سالب بالتحديد (negative semi – definite) لكل $X, Y \in D^\perp$.

$$(iii) \rho_{D^\perp D^\perp} \leq \frac{k}{4}(s-q)q \ .$$

$$(iv) \rho_{D^\perp D} \leq -\frac{k}{2} pq \ .$$

$$(v) \rho_{D D^\perp} \leq -\frac{k}{2}(p+1)q \ .$$

البرهان :

حيث أن M أدنى - $D^\perp$ إذن $H_{D^\perp} = 0$ ومن الفرضية $(4 \,.\, 3.4)$ يمكننا إثبات الآتي :

(i) لكل $Z, W \in D^\perp$ ، المعادلة $(4 \,.\, 3.8)$ تصبح :

$$S_{D^\perp}(Z,W) = \frac{k}{4}(s-q) g(Z,W)$$
$$- \textstyle\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, W), h(Z, E_k)\big) \ .$$

بالتالي :

$$S_{D^\perp}(Z,W) - \frac{k}{4}(s-q) g(Z,W)$$
$$= \textstyle\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, W), h(Z, E_k)\big) \ .$$

من الواضح أن الطرف الأيمن للمعادلة السابقة هو شبه سالب بالتحديد وبالتالي فإن الطرف الأيسر هو أيضاً شبه سالب بالتحديد .

(ii) لكل $X, Y \in D^{\perp}$، المعادلة $(4.4.10)$ تصبح :

$$S_{D^{\perp}}(X,Y) = \frac{k}{4}[\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - g(X,Y)]q$$
$$-\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, Y), h(X, E_k)\big) .$$

بالتالي فإن :

$$S_{D^{\perp}}(X,Y) - \frac{k}{4}[\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - g(X,Y)]q$$
$$= -\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, Y), h(X, E_k)\big) .$$

من الواضح أن الطرف الأيمن للمعادلة السابقة هو شبه سالب بالتحديد وبالتالي فإن الطرف الأيسر هو أيضاً شبه سالب بالتحديد .

(iii) المعادلة $(4.4.14)$ تصبح على الصورة :

$$\rho_{D^{\perp}D^{\perp}} = \frac{k}{4}(s-q)q$$
$$-\sum_{k,l=1}^{q} g\big(h(E_k, E_l), h(E_l, E_k)\big) .$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن :

$$\rho_{D^\perp D^\perp} \leq \frac{k}{4}(s-q)q\ .$$

(iv) المعادلة $(4\,.\,3.\,12)$ تصبح على الصورة :

$$\rho_{D^\perp D} = -\frac{k}{2}pq$$

$$-\sum_{j=1}^{2p+s}\sum_{k=1}^{q} g\left(h\left(E_k, E_j\right), h\left(E_j, E_k\right)\right).$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن :

$$\rho_{D^\perp D} \leq -\frac{k}{2}pq\ .$$

(v) المعادلة $(4\,.\,4.\,13)$ تصبح على الصورة :

$$\rho_{DD^\perp} = -\frac{k}{2}(p+1)q$$

$$-\sum_{l=1}^{q}\sum_{i=1}^{2p+s} g\left(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\right).$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن :

$$\rho_{DD^\perp} \leq -\frac{k}{2}(p+1)q\ .\ \blacksquare$$

فرضية 2-4-4

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α أدنى - $D^\perp$ ($D^\perp$ –minimal ξ_α -horizontal) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T (T-space form) ، إذن M هي جيوديسك كلي - $D^\perp$ (-totally geodesic $D^\perp$) إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

$$(i)\ S_{D^\perp}(Z,W) = \frac{k}{4}(s-q)g(Z,W), \qquad \forall\ Z,W \in D^\perp\ ,$$

$$(ii) \rho_{D^\perp D^\perp} = \frac{k}{4}(s-q)q\ .$$

البرهان :

(i) حيث أن M أدنى - $D^\perp$ ($D^\perp$ –minimal) إذن المعادلة $(4.4.8)$ تصبح على الصورة :

$$S_{D^\perp}(Z,W) = \frac{k}{4}(s-q)g(Z,W)$$
$$-\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k,W), h(Z,E_k)\big)\ .$$

لذلك M هي جيوديسك كلي - $D^\perp$ $\Leftrightarrow$ $h(Z,W) = 0$

$$g\big(h(E_k,W), h(Z,E_k)\big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k,W), h(Z,E_k)\big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$S_{D^\perp}(Z,W) = \frac{k}{4}(s-q)g(Z,W) \ \Leftrightarrow$$

(ii) حيث أن M أدنى - $D^{\perp}$ ($D^{\perp}$ –minimal) إذن المعادلة $(4.4.14)$ تصبح على الصورة :

$$\rho_{D^{\perp}D^{\perp}} = \frac{k}{4}(s-q)q$$

$$-\sum_{k,l=1}^{q} g\big(h(E_k, E_l), h(E_l, E_k)\big) .$$

لذلك M هي جيوديسك كلي - $D^{\perp}$ $\Leftrightarrow$ $h(Z, W) = 0$

$$g\big(h(E_k, E_l), h(E_l, E_k)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, E_l), h(E_l, E_k)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho_{D^{\perp}D^{\perp}} = \frac{k}{4}(s-q)q \Leftrightarrow$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 3-4-4

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_{α} أدنى - D (ξ_{α} -horizontal D –minimal) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T ، إذن:

$$(i) S_D(X, Y) - \frac{k}{4}[-(2p+3)g(X, Y)$$

$$+(2p+s+2)\eta_{\alpha}(X)\eta_{\alpha}(Y)]$$

يكون شبه سالب بالتحديد (negative semi – definite) لكل $X, Y \in D$.

$$(ii)\ S_D(Z, W) + \frac{k}{2}(p+1)g(Z, W)$$

يكون شبه سالب بالتحديد (negative semi – definite) لكل $Z, W \in D^{\perp}$.

$$(iii)\rho_{DD} \leq \frac{k}{4}[-2p(2p+3) + (s-1)s] .$$

$$(iv)\rho_{D^{\perp}D} \leq -\frac{k}{2}pq .$$

$$(v)\rho_{DD^{\perp}} \leq -\frac{k}{2}(p+1)q .$$

البرهان :

حيث أن M أدنى - D إذن $H_D = 0$ إذن يمكننا إثبات الآتي :

(i) لكل $X, Y \in D$ ، المعادلة $(4.4.4)$ تصبح :

$$S_D(X, Y) = \frac{k}{4}[-(2p+3)g(X, Y)$$

$$+(2p+s+2)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i, Y), h(X, E_i)\big).$$

بالتالي :

$$S_D(X,Y) - \frac{k}{4}[-(2p+3)g(X,Y)$$

$$+(2p+s+2)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$= -\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,Y), h(X,E_i)\big).$$

من الواضح أن الطرف الأيمن للمعادلة السابقة هو شبه سالب بالتحديد وبالتالي فإن الطرف الأيسر هو أيضاً شبه سالب بالتحديد .

(ii) لكل $Z, W \in D^\perp$ ، المعادلة $(4.4.7)$ تصبح :

$$S_D(Z,W) = -\frac{k}{2}(p+1)g(Z,W)$$
$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,W), h(Z,E_i)\big) .$$

بالتالي فإن :

$$S_D(Z,W) + \frac{k}{2}(p+1)g(Z,W)$$
$$= -\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,W), h(Z,E_i)\big) .$$

من الواضح أن الطرف الأيمن للمعادلة السابقة هو شبه سالب بالتحديد وبالتالي فإن الطرف الأيسر هو أيضاً شبه سالب بالتحديد .

(iii) المعادلة $(4.4.11)$ تصبح على الصورة :

$$\rho_{DD} = \frac{k}{4}[-2p(2p+3) + (s-1)s]$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2p+s} g\left(h(E_i,E_j), h(E_j,E_i)\right).$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن :

$$\rho_{DD} \leq \frac{k}{4}[-2p(2p+3)+(s-1)s] .$$

(iv) المعادلة (4 . 4. 12) تصبح على الصورة :

$$\rho_{D^{\perp}D} = -\frac{k}{2}pq$$

$$-\sum_{j=1}^{2p+s}\sum_{k=1}^{q} g\left(h\left(E_k, E_j\right), h\left(E_j, E_k\right)\right) .$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن :

$$\rho_{D^{\perp}D} \leq -\frac{k}{2}pq .$$

(v) المعادلة (4 . 4. 13) تصبح على الصورة :

$$\rho_{DD^{\perp}} = -\frac{k}{2}(p+1)q$$

$$-\sum_{l=1}^{q}\sum_{i=1}^{2p+s} g\left(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\right) .$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن :

$$\rho_{DD^{\perp}} \leq -\frac{k}{2}(p+1)q .$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-4-4

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α أدنى - D (D –minimal ξ_α -horizontal) من فضاء الشكل N(k) من النوع T– ، إذن M هي جيوديسك كلي - D (D -totally geodesic) إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

$$(i)\ S_D(X,Y) = \frac{k}{4}[-(2p+3)g(X,Y)$$

$$+(2p+s+2)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]\ ,$$

$$(ii)\rho_{DD} = \frac{k}{4}[-2p(2p+3)+(s-1)s]\ .$$

البرهان :

(i) حيث أن M أدنى - D (D –minimal) إذن المعادلة (4 . 4. 5) تصبح على الصورة :

$$S_D(X,Y) = \frac{k}{4}[-(2p+3)g(X,Y)$$

$$+(2p+s+2)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]$$

$$-\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,Y),h(X,E_i)\big).$$

لذلك M هي جيوديسك كلي - D $\Leftrightarrow$ $h(X,Y) = 0$

$$g\big(h(E_i,Y),h(X,E_i)\big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,Y),h(X,E_i)\big) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$S_D(X,Y) = \frac{k}{4}[-(2p+3)g(X,Y)$$

$$+(2p+s+2)\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)]\ ,\forall\ X,Y \in D \Leftrightarrow$$

(ii) حيث أن M أدنى - D (D -minimal)إذن المعادلة $(4.4.11)$ تصبح على الصورة :

$$\rho_{DD} = \frac{k}{4}[-2p(2p+3)+(s-1)s]$$

$$-\sum_{i,j=1}^{2p+s} g\left(h\big(E_i,E_j\big),h\big(E_j,E_i\big)\right).$$

لذلك M هي جيوديسك كلي - D $\Leftrightarrow$ $h(X,Y) = 0$

$$g\left(h\big(E_i,E_j\big),h\big(E_j,E_i\big)\right) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^{2p+s} g\left(h(E_i, E_j), h(E_j, E_i)\right) = 0 \iff$$

$$\rho_{DD} = \frac{k}{4}[-2p(2p+3) + (s-1)s], \forall\, X, Y \in D \iff$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

فرضية 4-4-5

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية – ξ_α أدنى - $D^{\perp}$ ($D^{\perp}$ –minimal ξ_α -horizontal) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T ، إذن M هي جيوديسك كلي مختلط - $D^{\perp}$ ($D^{\perp}$ -mixed totally geodesic) إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط التالية:

$$(i)\ S_{D^{\perp}}(X, Y) = \tfrac{k}{4}[\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - g(X, Y)]q\ ,\ \ \forall\, X, Y \in D\ .$$

$$(ii)\ \rho_{D^{\perp}D} = -\frac{k}{2}pq.$$

$$(iii)\ \rho_{DD^{\perp}} = -\frac{k}{2}(p+1)q.$$

البرهان :

(i) حيث أن M أدنى - $D^{\perp}$ ($D^{\perp}$ –minimal) إذن من المعادلة $(4.4.10)$، وأيضاً حيث أن M هي جيوديسك كلي مختلط فإن :

$$g\big(h(E_k, Y), h(X, E_k)\big) = 0 \iff$$

$$\sum_{k=1}^{q} g\big(h(E_k, Y), h(X, E_k)\big) = 0 \iff$$

$$S_{D^\perp}(X,Y) = \frac{k}{4}[\eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) - g(X,Y)]q \ , \ \forall\, X, Y \in D \iff$$

(ii) حيث أن M أدنى - $D^\perp$ ($D^\perp$ –minimal) إذن من المعادلة $(4\,.\,4.\,12)$،
وأيضاً حيث أن M هي جيوديسك كلي مختلط فإن :

$$g\left(h(E_k, E_j), h(E_j, E_k)\right) = 0 \iff$$

$$\sum_{j=1}^{2p+s} \sum_{k=1}^{q} g\left(h(E_k, E_j), h(E_j, E_k)\right) = 0 \iff$$

$$\rho_{D^\perp D} = -\frac{k}{2}pq \iff$$

(iii) حيث أن M أدنى - $D^\perp$ ($D^\perp$ –minimal) إذن من المعادلة $(4\,.\,4.\,13)$،
وأيضاً حيث أن M هي جيوديسك كلي مختلط فإن :

$$g\big(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\big) = 0 \iff$$

$$\sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\big) = 0 \iff$$

$$\rho_{DD^\perp} = -\frac{k}{2}(p+1)q \iff$$

وبذلك يكتمل البرهان. ■

فرضية 6-4-4

لتكن M عديد طيات جزئية من النوع كوشي ريمان الأفقية $-\xi_\alpha$ أدنى - D (ξ_α -horizontal D –minimal) من فضاء الشكل N(k) من النوع –T ، إذن M هي جيوديسك كلي مختلط (mixed totally geodesic) إذا وفقط إذا حققت M أحد الشروط التالية:

$$(i)\ S_D(Z,W) = -\frac{k}{2}(p+1)g(Z,W),\ \forall\, Z,W \in D^{\perp}\,.$$

$$(ii)\ \rho_{D^{\perp}D} = -\frac{k}{2}pq.$$

$$(iii)\ \rho_{DD^{\perp}} = -\frac{k}{2}(p+1)q.$$

البرهان :

(i) حيث أن M أدنى - D (D –minimal) إذن من المعادلة $(4.4.7)$، وأيضاً حيث أن M هي جيوديسك كلي مختلط فإن :

$$g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big) = 0 \iff$$

$$\sum_{i=1}^{2p+s} g\big(h(E_i,W),h(Z,E_i)\big) = 0 \iff$$

$$S_D(Z,W) = -\frac{k}{2}(p+1)g(Z,W),\ \forall\, Z,W \in D^{\perp} \iff$$

(ii) حيث أن M أدنى - D (D –minimal) إذن من المعادلة $(4.4.12)$، وأيضاً حيث أن M هي جيوديسك كلي مختلط فإن :

$$g\left(h(E_k, E_j), h(E_j, E_k)\right) = 0 \iff$$

$$\sum_{j=1}^{2p+s} \sum_{k=1}^{q} g\left(h(E_k, E_j), h(E_j, E_k)\right) = 0 \iff$$

$$\rho_{D^\perp D} = -\frac{k}{2} pq \iff$$

(iii) حيث أن M أدنى - D (D –minimal) إذن من المعادلة (4.4.13)، وأيضاً حيث أن M هي جيوديسك كلي مختلط فإن :

$$g\left(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\right) = 0 \iff$$

$$\sum_{l=1}^{q} \sum_{i=1}^{2p+s} g\left(h(E_i, E_l), h(E_l, E_i)\right) = 0 \iff$$

$$\rho_{DD^\perp} = -\frac{k}{2}(p+1)q \iff$$

وبذلك يكتمل البرهان .■

قائمة المراجع

المراجع

References

Aktan, N., Sarikaya, M. and Ozüsaglam, E. (2008) BY Chen's inequality for semi-slant submanifolds in T- space forms,*Balkan Journal of Geometry and Its Applications*,Vol.13:1-10.

Al-Jedani, A. and Al-Ghefari, R. (2010) CR-product of T- maniflod,*Far East J.of Math. Sciences(FJMS)*,Vol.38:39-48.

Alghanemi, A. (2008) CR-Submanifolds of an S-manifold,*Turk J Math TUBITAK*,Vol.32:141-154.

Bejancu, A. (1978) CR-submanifold of a Kaekler manifold,*Proc Amer. Math. Soc.*,Vol.69:135 - 142.

Bejancu, A. (1986) *Geometry of CR-submanifolds*, Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo: D. Reidel Pub. Co.

Bejancu, A. and Papaghivc, N. (1981) semi-invariont submanifold of a Sasakian manifold,*Ann.Stiint. Univ. Al.I,Cuza Iasi, Sect. I a Mat. N.S.*,Vol.27:163-170.

Blair, D. E. (1970) Geometry of manifolds with structural group U(n) XO(s),*Journal of differential geometry*,Vol.4:155-167.

Calabi, E. (1953) Isometric embedding of complex manifolds ,*Ann,Math.*,Vol.50:1-23.

Calin, C. (2002) CR-submanifold of a T-manifold,*Math.J.Toyama Univ.*,Vol.25-53: .63

Chen, B. Y. (1973) *Geometry of Submanifold*, New York Marcel Dekker

Chen, B. Y. (1981) CR-Submanifold of a Kaehler manifold *I,II,J. Diff. Geometry* Vol.16:305-322,493-509.

Chen, B. Y. (1990a) *Geometry of Slant Submanifold* Katholieke Univ. Leuven.

Chen, B. Y. (1990b) Slant Immersions,*Bull. Aus. Math. Soc.*,Vol.41:135-147.

Chen, B. Y. (2001) Geometry of warped produt CR-Submanifold in Kaehkler manifold,*I,II,Monatsh for Math.*,Vol.133:177-195.

Chen, B. Y. (2002) On isometric minimal immersion form warped product into real space froms,*proc. Edinburgh Math. Soc.*,Vol.45:

Chen, B. Y., Houthand, C. S. and Lue, H. S. (1977) Totally real Submanifolds,*J. Diff. Geom.*,Vol.12:473-480.

Chen, B. Y. and Ogioue, K. (1974) On totally real Submanifolds *Trans. Amer. Math.Soc.*,Vol.193:257-266.

Kadison, R. V. and Singer, I. M. (1993) *Riemannian geometry*, Birkhauser.Boston-Basel-Berlin.

Kenmotsu, K. (1972) A class of almost contact Riemannian manifold,*Tohoku Math. Journal*,Vol.24:93-103.

Kobayashi, M. (1981) CR-submanifold of a Sasakian manifold,*Tensor N.S.*,Vol.35:297-307.

Kobayashi, M., Mihai, I. and Shahid, M. H. (1998) Certain submanifolds in Kenmostu manifold,*Third Pacific Rim. Geometry Conf.,International Press U.S.A.* 297-307.

Kobayashi, M. and Tsuchiya, S (1972) .Invariant submanifolds of an f-manifold with complemented frames,*Kodai Math. Sem. Rep*,Vol.24:430–450.

Kobayashi, S. (1987) Submersion of CR- Submanifold,*Tohoku Math. J*,Vol.39:95-100.

Kreyszig, W. (1975) *Introduction to differential geometry and Riemannian manifold*, Mathematical Expositions No.16, University of Tronfo Press.

Matsumoto, K. (1993) On Contact CR- Submanifold of a Sasakian manifold,*Int. Jour. of Math. Sci.*,Vol.6:133-136.

Matsuyama, Y. and Sengupta, K. (2004) Generalized CR- Submanifold of a T-manifold,*J. Korea. Soc. Math. Educ*,Vol.11(3):175-187.

O'Neill, B. (1983) *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press.

Patty, C. W. (1993) *Foundations of Topology*, Boston: PWS- KENT Publishing Company.

Shahid, M. H. and Alsolamy, F. R. (2000) Submersion of quaternion CR-Submanifold of a quaternion Kaehler manifold,*Math. Toyama Univ.*,Vol.23:93-113.

Shahid, M. H. and Sekigawa, K. (1993) Generic Submanifold of a locally conformal Kaehler manifold,*II,Int. Jour. of Math. Sci.*,Vol.16(3):557-564.

Shahid, M. H., Sharfuddin, A. and Hasain, S. I. (1985) CR-submanifold of a Sasakian manifold,*Review Research Fac.Sc. Yugoslavia*,Vol.15:263-278.

Sinha, B. B. (1982) *An Introduction to Modern Differential Geometry*, New Delhi: Kalyani Publishers.

Sutherland, W .A. (1975) *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford Univ. Press.

Yano, K. (1963) On a structure defined by a tensor field f-type (1,1) satisfying $f^3+f=0$,*Tensor N. S.*,Vol.14:99-109.

Yano, K. and Kon, M. (1984) *Structures on manifolds*, World Scientific Singapore.

قائمة المصطلحات

أهم المصطلحات العلمية

الكلمة	الترجمة

A

Almost	تقريباً
Anti-invariant	تخالفي للامتغير
Atlas	أطلس

B

Bundle	حزمة

C

Chart	خريطة
Complementary	متمم – مكمل
Connection	ترابط
Contact	متلامس
Cotangent	المماس المصاحب
Constant	ثابت
Covariant	متغاير
Curvature	تقوس
Cover	غطاء

D

Differentiable	تفاضلي
Distribution	توزيع
Dimension	بُعد

Dual	ثنوي
Decomposition	تحليل

F

Field	مجال
Form	شكل – نموذج
Frame	إطار
Function	دالة

G

Geodesic	جيوديسك

H

Horizontal	أفقي

I

Identically	تطابقياً
Immersion	احتواء
Integrable	تكاملي
Invariant	لا متغير
Involutive	مُنشأ

L

Lie bracket	قوس لي
Linear map	راسم خطي

M

Manifold	عديد الطيات
Mean	متوسط
Metric	متري

Multilinear	متعدد الخطية
Minimal	أدنى
N	
Neighborhood	جوار
Normal	عمودي - ناظمي
O	
Orthogonal	متعامد
Orthonormal	عياري التعامد
Operator	مؤثر
P	
Parallel	موازٍ
Positive	سالب
Projector	مسقط
Proper	فعلي
R	
Rank	رتبة
S	
Scalar	قياسي
Sectional	مقطعي
Semi definite	شبه محددة
Smooth	أملس
Space	فضاء
Structure	تركيبة – بنية
Submanifold	عديد طيات جزئي

Subspace	فضاء جزئي
Symmetric	متماثل

T

Tangent	مماس
Tensor	ممتد
Torsion	التواء
Totally	كلي

V

Vector	متجه
Vertical	رأسي

المستخلص باللغة الإنجليزية

ABSTRACT

The geometry of Submanifolds is a very important and useful branch in differential geometry , Since it has many important applications in physics and some other branches of sciences .Based on the above perspectives , the present thesis focus on the study of CR-submanifold of an T- manifold, which is considered as modern extensions of Riemannian manifold theory, and also it is very interesting topic for study and research. We studied comprehensively some theories and properties of CR-submanifold of an T- manifold . Furthermore, we studied CR-product, normal CR-submanifold of an T-manifold and the relation between these two topics.Finally, we studied integrability conditions of distributions, sectional curvature, Ricci tensor and scalar curvature . Moreover, we obtained new results related to the mentioned matters.

GEOMETRY OF SUBMANIFOLD OF

T-MANIFOLD

BY

AWATIF MOHAMMED AL-JEDANI

A thesis submitted for the requirements of the degree of Master of Science (pure mathematical – differential geometry)

SUPERVISED BY

Dr. REEM AL-GHEFARI

FACULTY OF SCIENCE FOR GIRLS

KING ABDULAZIZ UNIVERSITY

JEDDAH – SAUDI ARABIA

1431-1432 A.H. \ 2010-2011 A.D.